点集拓扑学

方嘉琳　编著

辽宁人民出版社

1983年·沈阳

点集拓扑学

方嘉琳 编著

·

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1甲2号）

辽宁省新华书店发行

朝阳六六七厂印刷

·

开本：850×1168 1/32 印张 $8\frac{3}{8}$ 插页：2

字数：190,000 印数：1—8,400

1983年4月第1版 1983年4月第1次印刷

统一书号：7090·199 定价：1.95元

前　言

本世纪初，由于集合论和公理化方法的发展，在分析学进展过程中积累大量素材的基础上，产生了抽象空间的理论，从而建立了点集拓扑学．由于这一学科采用了极为有力的表述形式和高度抽象的观点、方法，它的理论显得十分简洁而具有高度的概括力．以致它的题材广泛地应用到现代数学的许多分支中去，而成为现代数学的基本工具之一．点集拓扑学正在继续发展，新的观点不断涌现，新的理论不断形成，新的方法不断产生．

在60年代，国际上普遍地认识到点集拓扑学在现代数学中的逻辑地位，许多高等院校已开设了这门课程．目前，它的观点和方法已渗透到中学数学的教学中去．在我国，由于十年动乱的影响，直到粉碎“四人帮”之后，这门课程才进入大学课堂，成为高等院校数学系的一门必修课．

本书是点集拓扑学的入门书，凡是对集合论的知识有一定了解的读者，都可顺利地阅读．为了方便读者，在预章中摘要地叙述了本书所涉及到的集合论的初步知识．对个别较深的问题作了详细的论述．

由于点集拓扑学抽象性较强，初学的读者必然感到有些问题难于理解．为了便于学习，本书从具体而重要的特殊情形——度量空间开始叙述，进而由具体到抽象，由浅入深，循序

渐进。

拓扑空间可用不同的语言，从不同的公理出发予以论述。本书是按现在通用的开集公理刻画的。在楷体部分中详尽地阐述了常见的各种公理的等价性。

由于拓扑的基本思想来源于分析学，基本概念都有其具体背景，在学习拓扑空间理论时，必须将抽象的叙述形式和具体的实际原型联系起来。这是至关重要的。分析学中 Euclid 空间的一些结构和有关极限的一些思想常常是拓扑学的具体模型。因此，在学习时，应注意掌握公理和概念的实质。

点集拓扑学的发展过程，可以说是解决问题的过程。有些问题是通过提出新观点、给出新方法、建立新理论给予肯定的解决；有些问题是通过反面的事例给予否定的答案。用例题给予新概念以可靠的基础也有重要意义。因此，在点集拓扑理论中，例题往往占有重要地位，不得忽视。为了帮助读者加深理解拓扑知识，熟练地运用拓扑的观点和方法去解决实际问题，本书在每节后边都配有大量的习题。

本书可作为高等院校数学系高年级学生的必修课讲义，也可供数学工作者参考。其中楷体部分初学者可略去不读。

本书的编写承蒙我的老师张德馨教授、吴莲溪教授给予很大的鼓励和支持。吴莲溪教授和许凤同志认真地审阅了本书原稿，提出许多有益的修改意见，特此致谢。

由于水平所限，错误和不妥之处，请批评指正。

方　嘉　琳

1981．1

目　录

预 章 集合论概要

(outline of the theory of sets)

集合的概念是现代数学最基本的概念，它的观点和方法已渗透到数学的所有分支。为了本书的需要，本章将概括地介绍有关集合的基本概念、必要的定理和表示方法。

§1 集合及其运算

(sets and operations on sets)

凡是具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体就是一个集合，或简称为集 (set)。通常用 A、B、C、M、N、X、Y…等大写字母表示。

设 A 是一个集合，构成集合 A 的事物 a 称为 A 的元素 (element)，通常用 a、b、c、m、n、x、y…等小写字母表示。

当 a 是 A 的一个元素时，常称为 a 属于 (belong) A，或 A 含有 (contain) a。应用 G.Peano 记号，记作

$$a \in A \quad 或 \quad A \ni a.$$

若 a 不是 A 的元素，则称 a 不属于 A 或 A 不含有 a，记作

$$a \overline{\in} A, \ a \notin A \ 或 \ A \not\ni a.$$

集合也称为类 (class)，族 (family)，丛 (collection)，系 (system)，汇集 (aggregate)；元素也称为元，成分 (member)，点 (point)。为了标明集合的特征，常在符号上明确标出元素的特性。而以

$$\{x : x 具有性质 P\}$$

或

$\{x \mid x$具有性质$P\}$

表示。当集合仅由有限个元素构成时，也可具体写出，如用$\{a,b,c\}$表示由a,b,c三个元素构成的集合。

不含任何元素的集合称为**空集**（empty set），记作ϕ。

当且仅当集合A的元素都属于集合B时，称集合A为集合B的**子集**（subset），或者说集合B包含（contain）集合A，或者说集合A被集合B包含（contained）。记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

当集合A不是集合B的子集时，通常记作

$$A \not\subset B \quad 或 \quad B \not\supset A.$$

当且仅当$A \supset B$且$B \supset A$时，称集合A与集合B**相等**（equal），记作

$$A = B.$$

当且仅当$A \supset B$且$A \neq B$时，称集合B是集合A的**真子集**（proper subset）。

关于包含关系有下列性质：

a．$\phi \subset A$；

b．$x \in A \Longleftrightarrow \{x\} \subset A$（$\Longleftrightarrow$表示充要条件）；

c．若$A \subset B$且$B \subset C$，则$A \subset C$。

由集合A与集合B的一切元素组成的集合，叫作集合A与集合B的**并集**（union），记作

$$A \cup B.$$

即：$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A$或$x \in B$。

由集合A与集合B的公共元素组成的集合，叫作A与B的**交集**（intersection），记作

$$A \cap B.$$

即：$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$且$x \in B$。

定理1　下列诸运算律成立：

a. 交换律(commutative law):

$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

b. 结合律(associative law):

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

c. 分配律(distributive law):

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

d. 幂等律(idempotent law):

$A\cup A=A\cap A=A$;

e. 吸收律(absorption law):

$A\cup(B\cap A)=A\cap(B\cup A)=A$.

集合E的所有子集构成的集合,称为E的幂集(power set),记作$\mathfrak{P}(E)$。即:

$$\mathfrak{P}(E)=\{A:A\subset E\}$$

显然, $\phi\in\mathfrak{P}(E)$, $E\in\mathfrak{P}(E)$, $x\in E\Longleftrightarrow\{x\}\in\mathfrak{P}(E)$。$\mathfrak{P}(E)$的子集称为集族 (family of sets)。对于$A\in\mathfrak{P}(E)$,满足条件

$$A\cup B=E,\quad A\cap B=\phi$$

的集合B称为集合A关于E的补集(complement set),或简称为A的补集,记作

$$B=\mathscr{C}_E(A)\quad\text{或}\quad B=\mathscr{C}(A).$$

集合A的元素但非集合B的元素的全体称为A与B的差集(difference set),记作

$$A\backslash B\quad\text{或}\quad A-B.$$

定理 2 (de Morgan公式)对偶原理(duality principle)

$$\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B,\ \mathscr{C}(A\cap B)=\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B.$$

定理 3 下列关系成立.

$$\mathscr{C}(\mathscr{C}(A))=A;\ \mathscr{C}(\phi)=E;\ \mathscr{C}(E)=\phi.$$

设D是一个集，$\mathfrak{M}$是一个集族．若对于D的任一元素α，在$\mathfrak{M}$中有且仅有一个集 A_α 与之对应，而且$\mathfrak{M}$的每个集都对应D的某个元素，称$\mathfrak{M}=\{A_\alpha: \alpha \in D\}$为以$D$为指标集(index set)的集族．

关于并、交运算，自然可以推广到集族上．

$$\bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha = \{x: 有\ \alpha \in D,\ 使\ x \in A_\alpha\}．$$

$$\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha = \{x: 对所有\ \alpha \in D,\ 均有\ x \in A_\alpha\}．$$

定理 4　设$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$为集族，$C$为任一集，则

a．若对每个$\alpha \in D$，有$A_\alpha \subset C$，则 $\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha \subset C$．

b．若对每个$\alpha \in D$，有$A_\alpha \supset C$，则$\bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha \supset C$．

定理 5　设$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$为集族，$B$为任一集，则

a．$B \cap \left(\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in D} (B \cap A_\alpha)$；

b．$B \cup \left(\bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha \in D} (B \cup A_\alpha)$．

定理 6　(de Morgan公式)对偶原理．

a．$\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha \in D} \mathscr{C}(A_\alpha)$；

b．$\mathscr{C}\left(\bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in D} \mathscr{C}(A_\alpha)$．

当$\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha \supset C$ 时，称为集族 $\{A_\alpha: \alpha \in D\}$ 是C的**覆盖**(covering)．若$\{A_\alpha\}$，$\{B_\beta\}$ 都是C的覆盖，且$\{A_\alpha\} \subset \{B_\beta\}$，则称$\{A_\alpha\}$是$\{B_\beta\}$的**子覆盖**(subcovering)．若$\{A_\alpha\}$是有限集，则称为**有限子覆盖**(finite subcovering)．

若集合构成的序列$\{A_n: n为自然数\}$，满足

$$A_n \subset A_{n+1}\ (A_n \supset A_{n+1}),\ n=1,\ 2,\cdots\cdots$$

则称为**单调增加(减少)集列**(monotone increasing (decreasing))，

或递增(减) **集列**. 统称之为**单调集列**(monotone set sequence).

设 $\{A_\alpha: \alpha \in D\}$ 为集族, 若对于任意 $\alpha, \alpha' \in D$, $\alpha \neq \alpha'$, 恒有 $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \phi$ 时, 则集族 $\{A_\alpha: \alpha \in D\}$ 称为**两两不相交**(disjoint)的, 而 $A = \bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha$ 称为集族 $\{A_\alpha: \alpha \in D\}$ 的**直并**(direct union), 记作 $A = \sum_{\alpha \in D} A_\alpha$. 集族 $\{A_\alpha: \alpha \in D\}$ 称为 A 的**直并分解** (direct union decomposition), 而各 A_α 称为 A 的**直并因子**(direct union factor).

任意两个对象 a, b 确定一个对象 $c = (a, b)$ 称为**序对**(ordered pair).

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2.$$

若 $c = (a, b)$, 则称 a 为 c 的**第一坐标** (first coordinate), 而 b 称为 c 的**第二坐标**(second coordinate).

设 A、B 为任意二集, 所有序对的集

$$\{(a, b): a \in A, \ b \in B\}$$

称为集 A 与集 B 的**直积**(direct product), 记作 $A \times B$.

设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为 n 个集, 任取 $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 做元素 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 则

$$A = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n): a_i \in A_i, \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**直积**(direct product), 记作

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

而各 A_i 称为 A 的**坐标空间**(coordinate space).

例如 n 维 Euclid 空间就是 n 个实直线的直积.

【习　题】

1. 试证下列诸条件是等价的:

　a. $A \subset B$;

b．$A\cap B=A$；

c．$A\cup B=B$；

d．$A\cap\mathscr{C}B=\phi$；

e．$\mathscr{C}(A)\cup B=E$；

f．$A\setminus B=\phi$．

2．设$\{A_\alpha:\alpha\in D\}$，$\{B_\beta:\beta\in E\}$为二集族．试证

a．$\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cap\left(\bigcup_{\beta\in E}B_\beta\right)=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in D\times E}(A_\alpha\cap B_\beta)$；

b．$\left(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cup\left(\bigcap_{\beta\in E}B_\beta\right)=\bigcap_{(\alpha,\beta)\in D\times E}(A_\alpha\cup B_\beta)$．

3．设$\{A_{\alpha\beta}:(\alpha,\beta)\in D\times E\}$为集族，试证

a．$\bigcup_{(\alpha,\beta)\in D\times E}A_{\alpha\beta}=\bigcup_{\alpha\in D}\left(\bigcup_{\beta\in E}A_{\alpha\beta}\right)$；

b．$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in D\times E}A_{\alpha\beta}=\bigcap_{\alpha\in D}\left(\bigcap_{\beta\in E}A_{\alpha\beta}\right)$．

4．设$f(x)$为点集E上的实值函数，则

$$\{x:f(x)=a\}=\bigcap_{n\in N}\left\{x:a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}.$$

5．设$\{A_n:n\in N\}$是集列，作$B_1=A_1$，$B_n=A_n-\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)$，$(n>1)$，试证$\{B_n:n\in N\}$是一列两两不相交的集，而且

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}B_i,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

6．设$\{A_i:1\leqslant i\leqslant n\}$是有限集族，对于自然数集$N$的区间$[1,n]$的任意子集$H$，令

$$P_H=\bigcup_{i\in H}A_i,\quad Q_H=\bigcap_{i\in H}A_i.$$

再令T_K是$[1,n]$中取K个元素的所有子集的族，试证

$$\bigcup_{H\in T_k}Q_H\supset\bigcap_{H\in T_k}P_H\ (\text{若}\ 2k\leqslant n+1),$$

$$\bigcup_{H\in T_k} Q_H \subset \bigcap_{H\in T_k} P_H \quad (\text{若 } 2k \geqslant n+1).$$

7．若$\{A_\alpha: \alpha \in D\}$为$A$的直并分解；而$\{A_{\alpha\beta}: \beta \in D_\alpha\}$为$A_\alpha$的直并分解，则$\{A_{\alpha\beta}: \alpha \in D, \beta \in D_\alpha\}$为$A$的直并分解．即：

$$\text{若 } A = \sum_{\alpha\in D} A_\alpha,\quad A_\alpha = \sum_{\beta\in D_\alpha} A_{\alpha\beta},\quad \text{则 } A = \sum_{\alpha\in D}\sum_{\beta\in D_\alpha} A_{\alpha\beta}.$$

8．设 $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(E_1)$，$B_1, B_2 \in \mathfrak{P}(E_2)$，则$A_1\times B_1$，$A_2\times B_2 \in \mathfrak{P}(E_1\times E_2)$，且

a．$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$，

b．$\mathscr{C}(A_1\times B_1) = (\mathscr{C}A_1\times E_2)\cup(A_1\times\mathscr{C}B_1)$
$= (E_1\times\mathscr{C}B_1)\cup(\mathscr{C}A_1\times B_1)$．

§2 关系与映射

(relation and mapping)

数学的许多对象可以用集合和关系的语言予以简洁描述．集和关系的观念已成为刻画一些必要概念（诸如序、函数…）的基础．我们只讨论二元关系的概念和初等定理．

设A、B为二集，R为A与B间的关系．若$a\in A$和$b\in B$有这个关系，则说a与b有R关系(relation)，写作$(a,b)\in R$，或$a\,R\,b$．否则，若a和b没有R关系，则写作$(a,b)\notin R$，或$a \not R\, b$．

特别地，当$A=B$时，R称为A上的关系．

可见R是序对的集合，它是$A\times B$的子集．

如元素和集合的属于关系，集合间的包含关系，实数间的大小关系，整数间的同余关系，直线间的平行关系，平面图形的相似关系等都是相应集合间的二元关系．

集$\{x$：对某个y，$(x,y)\in R\}$称为关系R的定义域(domain)，记作D_R．而集$\{y$：对某个x，$(x,y)\in R\}$称为关系R

的值域(range)，记作E_R。

当且仅当a与b有R关系时，称b与a有R^{-1}关系，R^{-1}称为R的逆关系(inverse relation)。

显然$(a, b)\in R \Longleftrightarrow (b, a)\in R^{-1}$，$(R^{-1})^{-1}=R$。

设R_1为A与B间的关系，R_2为B与C间的关系，则

$\{(a, b)$：对某个c，$(a, c)\in R_1$，$(c, b)\in R_2\}$

为A与C间的关系称为R_1关系与R_2关系的复合(composition)，记作

$$R_2\circ R_1$$

显然$R_2\circ R_1$一般与$R_1\circ R_2$是不相等的。

定理1 设R_1、R_2、R_3为集E上的关系，则

a. $(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$，

b. $R_1\circ(R_2\circ R_3)=(R_1\circ R_2)\circ R_3$。

若$A\subset D_R$，令

$R[A]=\{b:(a, b)\in R$，对某个$a\in A\}$，

$R[A]$称为关系R在A的象(image)。特别地，当$A=\{a\}$时$R[\{a\}]$常写作$R[a]$，称为关系R在a的纤维(fibre)。若$B\subset E_R$，令

$R^{-1}[B]=\{a$：对某个$b\in B$，$(a, b)\in R\}$

$R^{-1}[B]$称为关系R在B的原象(inverse image)。特别地，当$B=\{b\}$时，$R^{-1}[\{b\}]$常写作$R^{-1}[b]$，称为关系R在b点的反纤维(inverse fibre)。

定理2 设R，R_1为集E的关系，A，B为E的子集，则

a. $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$，

b. $R[A\cap B]\subset R[A]\cap R[B]$，

c. $(R\circ R_1)[A]=R[R_1[A]]$。

设R为集E的关系，若对任意$a\in E$，恒有$(a, a)\in R$，则称R为自反的(reflexive)。

对任意$a,b\in E$，当且仅当$(a,b)\in R$时，$(b,a)\in R$，

称R为对称的(symmetric)。

若$(a, b)\in R$，且$(b, a)\in R$，则$a=b$时，称R为反对称的(antisymmetric)。

若$(a, b)\in R$，则$(b, a)\notin R$时，称R为非对称的(asymmetric)。

若$(a, b)\in R$，$(b, c)\in R$，则$(a, c)\in R$时，称R为可迁的(transitive)。

关系R是自反的、对称的、可迁的时，称为等价关系(equivalence relation)，记作$\sim$。这是一种重要关系。

图形的合同、相似、全等，直线的平行，整数的同余等都是等价关系，而直线的垂直，实数的大小、点集的包含等都不是等价关系。

等价关系是同一集合的元素之间的关系，两不同的集合之间的关系不是等价关系．如点在直线上，元素属于集合等关系谈不上等价关系。

设R是集E的等价关系，令

$$R[a]=\{b: b\in E,\ (a, b)\in R\},$$

称之为由a确定的R等价类(equivalence class)，通常也记作$[a]_R$。

对于任意$a, b\in E$，必有$R[a]=R[b]$或$R[a]\cap R[b]=\phi$。

定理3 设R为集E的等价关系，则E是R等价类的直并。R等价类构成E的直并分解，且分解是唯一的。

E的R等价类构成的集常记作

$$E/\sim \quad 或 \quad E/R,$$

称为E关于R的商集(quotient set)。

这种用等价关系进行分类的方法在现代数学中是常见的。

从数的大小、集的包含等关系中，可抽象出序的概念，序关系也是一种重要的关系。

集E中满足可迁的二元关系"$<$"称为序关系(ordering

relation)、偏序关系 (partial ordering) 或拟序关系 (quasi ordering)。

集E的元素间建立了序关系"$<$"时，称E为**有序集** (ordered set)或**半序集** (semi—ordered set) 或**偏序集**(partially ordered set)，记作$(E, <)$. $a<b$称为a小于b或a前于b. 亦可称为b大于a或b后于a.

在有序集$(E, <)$中，规定

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a<b，或 a=b.$$

则关系$\leqslant$亦是可迁的.

设A为有序集E的子集，若有$a \in E$，对于A的任一元素x，恒有$x \leqslant a$，则称a为A的**上界** (upper bound). 有上界的集称为**上方有界** (bounded to the above)的. 相应的可以定义**下界**(lower bound)及**下方有界**(bounded to the below) 的概念. 当上、下方都有界时称为**有界集**(bounded set).

当a是A的元素且是A的上界时，称a为A的**最大元**(maximum)或**最后元素**，记作$\max A$. 相应的有**最小元** (minimum)或**最前元素**的概念，记作 $\min A$. 在A的上界集中若有最小元，称为A的**最小上界**(least upper bound)或**上确界**(supremum)，记作$\sup A$. 相应的有**最大下界**(greatest lower bound)或**下确界**(infimum)的概念，记作$\inf A$.

集A的元素a，若对任何$x \in A$，$a<x$都不成立时，a称为A的**极大元**(maxima). 相应的有**极小元**(minima)的概念.

若有序集$(E, <)$满足

a. 反对称性：若$a<b$且$b<a$，则$a=b$.

b. 可比性：若$a, b \in E$，则必有$a<b$或$b<a$成立.

则称$<$为E的**线性序** (linear order) 关系，**全序**(total order, complete order)关系，或**单序**(simply order)关系，而E称为**全序集**(totally ordered set)或**线性序集**(linearly ordered set).

有序集E的子集A关于E的序也是有序集，称A为E的序

子集(ordered subset)。若A关于E的序为全序集，则称A为E的全序子集(totally ordered subset)。

在全序集中，形如

$$\{x: a<x<b\}$$

的子集，以(a, b)表示之，称为区间(interval)。形如

$$\{x: x<c\}$$

的子集，称为由c确定的截段(segment)。

当$a<c<b$时，称c在a，b之间(between)。在全序集中任意二相异元素之间必有其它元素时，称该全序集为序稠密(order dense)的。当$a<b$，而a，b之间没有元素时，a称为b的直前元(immediately before)，而b称为a的后继元或直后元(immediately after)。

全序集E的每个有上界的非空子集必有上确界时，称序集E为序完备(order complete)的。

另一种重要关系是映射。

集A和集B的关系f，如果满足

a．$D_f=A$,

b．若$(a, b)\in f$，$(a, c)\in f$，则$b=c$ $(b, c\in B)$，则称f为A到B的映射(mapping)，记作$f: A\to B$。b称为f在a的象(image)或值(value)，记作$f(a)=b$。对应(correspondence)、变换(transformation)、函数(function)、算子(operator)等在不同学科里的不同语言都是映射的同意语。

若映射f，g满足

a．$D_f=D_g$,

b．对于$x\in D_f$，恒有$f(x)=g(x)$，

则称映射f和g相等(equal)。

常值映射(constant mapping)$\{(x, b): x\in A\}$。

恒等映射(identity mapping)$\{(a, a): a\in A\}$。

这个集合通常也称为对角集(diagonal set)，记作$\triangle_A$。

包含映射(inclusion mapping)或**嵌入**(embedding){(a,a): $a\in A$, $A\subset E$}.

E 到 E/R 上的**自然映射** (natural mapping) 或**典型映射**(canonical mapping){$(a, R[a])$: $a\in E$}.

序列(sequence){(n, a_n): $a_n\in A$, $n\in N$}
为自然数集上定义，在 A 中取值的函数，简记为 $(a_n, n\in N)$ 或 (a_n).

射影映射(projection mapping)

$$\{((a_1,\cdots, a_i, \cdots, a_n), a_i): a_i\in A_i, j=1, 2,\cdots, n\}$$

它是积空间 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 到坐标空间 A_i 的映射，通常记作 p_i，简称为**射影**(projection).

设 $f: A\to B$. 若 $E_f=B$，则称 f 为 A 到 B 上(onto)的映射，或**满射**(surjection). 若 $a_1, a_2\in A$，当 $a_1\neq a_2$ 时恒有 $f(a_1)\neq f(a_2)$，则称 f 为**单射**(injection)或**一一映射**(one-to-one mapping). 若 f 既是满射也是单射时，则称 f 为**双射**(bijection).

显然，恒等映射是双射，射影是满射.

若 f 为双射，则由关系 $b=f(a)$ 确定 B 到 A 的映射，写做 $f^{-1}: B\to A$，称为 f 的**逆映射**(inverse mapping). 一般的，设 $f: A\to B$，对于 B 的任意子集 B_1，A 的子集 {a: $a\in A$, $f(a)\in B_1$} 称为 f 下 B_1 的**原象**(inverse image)，记作 $f^{-1}(B_1)$. 原象和逆映射都用同一记号 f^{-1} 表示是不会发生混淆的. 因逆映射存在时，二者是一致的；不存在时，f^{-1} 只表示原象.

设 $f: A\to B$, $g: B\to C$，则 $a\to g(f(a))$ 是 A 到 C 的映射. 称之为 g 和 f 的**复合**(composition)，写作 $h=g\circ f$.

显然，映射的复合满足结合律.

设 $f: B\to C$, $g: A\to C$, $A\subset B$，若对于任一 $x\in A$，恒有

$$g(x)=f(x),$$

则称映射 g 为映射 f 在 A 上的**限制**(restriction)，而 f 称为 g 到 B 上的**扩张**(extension). 写作

$g = f \mid A$

由概念直接得到下述结论：

1. 设 $f: A \to B$，$\{A_\lambda: \lambda \in D\}$为$A$的子集族，$\{B_\lambda: \lambda \in D\}$为$B$的子集族，则

a. $f(\bigcup A_\lambda) = \bigcup f(A_\lambda)$.

b. $f(\bigcap A_\lambda) \subset \bigcap f(A_\lambda)$.

c. $f^{-1}(\bigcup B_\lambda) = \bigcup f^{-1}(B_\lambda)$.

d. $f^{-1}(\bigcap B_\lambda) = \bigcap f^{-1}(B_\lambda)$.

2. a. 若f, g都是单射，则 $h = g \circ f$ 也是.

b. 若f, g都是满射，则 $h = g \circ f$ 也是.

c. 若f, g都是双射，则 $h = g \circ f$ 也是.

d. 若f, g都是双射，则$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

e. 若f是双射，则$f^{-1} \circ f$是恒等映射.

3. a. $f(f^{-1}(B)) \subset B$，$A \subset f^{-1}(f(A))$.

b. $\mathscr{C} f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathscr{C} B)$.

c. 当f为满射时，$f(f^{-1}(B)) = B$，

当f为单射时，$f^{-1}(f(A)) = A$.

应用映射的概念可以将集的直积概念推广到任意集族上去.

设$\{A_\lambda: \lambda \in D\}$为集$S$的子集族，$f: D \to S$为使$f(\lambda) \in A_\lambda$的映射. 令$P = \{f: f$为$D$到$S$的映射，使$f(x) \in A_\lambda$，$\lambda \in D\}$，$P$称为$\{A_\lambda: \lambda \in D\}$的**直积集**(direct product sets). 记作

$$P = \prod_{\lambda \in D} A_\lambda$$

A_λ称为P的**直积因子**(direct product factor). P的元素恒可表示为$(x_\lambda: \lambda \in D)$的形式，其中$x_\lambda = f(\lambda)$称为$f$的**λ-分量**(λ—component)或**λ-坐标**(λ—coordinate)，使$(x_\lambda: \lambda \in D)$对应$x_\lambda$的映射，写作$p_{r_\lambda}$称为$P$在λ分量上的**射影**(projection).

直积集的一个特殊情形是所有 A_λ 都相等。这时直积 P 简写作A^D。它是所有D到A的映射的全体。

【习　　题】

1. 若 $A\supset A_1\supset A_2$，则 $f(A_1\setminus A_2)\supset f(A_1)\setminus f(A_2)$，并举出不相等的例子。

2. 关系R是集E的等价关系，当且仅当存在直并分解$\mathfrak{M}$，使 $R=\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{M}}(A\times A)$。

3. 设R为集E的关系，则含有关系R的最小等价关系是唯一存在的。

4. 集E的关系R满足对称性及可迁性，那末R是否必是等价关系？下述推理有什么错误？

若$(a, b)\in R$，则$(b, a)\in R$（对称性）。

若$(a, b)\in R$，$(b, a)\in R$，则$(a, a)\in R$（可迁性）。

故对任一a恒有$(a, a)\in R$，即自反性成立。故R是等价关系。

5. 设$f: A\to B$，指出下列诸条件等价：

a. f是单射；

b. 对于A的任一子集A_1，恒有$f^{-1}(f(A_1))=A_1$；

c. 对于A的任一子集对A_1，A_2，恒有

$f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$；

d. 对于A的任一子集对A_1，A_2，若 $A_1\cap A_2=\phi$，则$f(A_1)\cap f(A_2)=\phi$；

e. 对于A的任一子集对 A_1，A_2，若 $A_2\subset A_1$，则$f(A_1\setminus A_2)=f(A_1)\setminus f(A_2)$。

6. 设A，B是二集，f是A到B的单射，g是B到A的单射，试证存在A的两个子集A_1，A_2，使$A_2=A-A_1$，及存在

B的两个子集 B_1, B_2, 使 $B_2=B-B_1$, 而且 $B_1=f(A_1)$ 及 $A_2=g(B_2)$。

§3 实数的连续性

(continuity of real number)

本节讨论实数。实数理论是分析学基础之一，也是现代数学思想的重要源泉之一。

设A, B为实数集R的子集。若$R=A\cup B$, $A\neq\phi$, $B\neq\phi$, 且当 $x\in A$, $y\in B$时有$x<y$，这时组(A, B)称为 **Dedekind切断**(Dedekindscher schnitt)。

Dedekind公理：对于任意Dedekind切断(A, B)，有实数c，使$A=(-\infty, c]$, $B=(c,+\infty)$ 或$A=(-\infty,c)$, $B=[c,+\infty)$成立。

定理1 (Weierstrass确界存在公理) 上方有界的集合S必有上确界。

证明 当S是由一个元素c组成时，c本身就是S的上确界。当S最少有两个元素a, b时，不妨设$a<b$。设B为S的上界的集合，A为其补集。因S是上方有界的，故$B\neq\phi$。因a不是S的上界，故$A\neq\phi$。对于$x\in A$, $y\in B$，如果$x\geqslant y$，则因y是S的上界，x也是S的上界。这与$x\in A$矛盾。于是，若$x\in A$, $y\in B$，则必有$x<y$，即(A, B)是Dedekind切断。由Dedekind公理，有实数c，使$A=(-\infty,c]$, $B=(c,+\infty)$或$A=(-\infty, c)$, $B=[c,+\infty)$。

如果$c\in A$，即前者的情形。因c不是S的上界，有S的元素x，使$c<x$。令$b=(x+c)/2$，则$c<b<x$。因$B=(c,+\infty)$，故$b\in B$。b是S的上界，而x是S的元素，$x>b$，这是矛盾的。故$c\notin A$，而$A=(-\infty,c)$, $B=[c,+\infty)$成立。c是B的最小的数，即c是S的上确界。

设 $(a_n: n\in N)$ 为实数列，a 为实数。对于任意正数 ε，有自然数n_0，当$n\geqslant n_0$，有$|a_n-a|<\varepsilon$成立时，称为$(a_n:n\in N)$**收敛**(convergence)于 a。写做$a_n\to a(n\to\infty)$。a 称为 (a_n) 的**极限**(limit)，写作 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

实数列$(a_n: n\in N)$当 $n\geqslant 1$，有 $a_n\leqslant a_{n+1}$(或$a_n\geqslant a_{n+1}$)时，称为**单调非减少**（**单调非增加**）的，单调非减少或单调非增加的数列称为**单调数列**(monotone sequence)。

定理 2 上方有界的单调非减少数列是收敛的。

证明 因数列 $(a_n: n\in N)$ 是上方有界的，由定理 1 $\{a_n: n\in N\}$有上确界a_0。因a_0是$(a_n: n\in N)$的最小上界，对于任意正数 ε，$a_0-\varepsilon$ 不是$(a_n: n\in N)$的上界。故有自然数 n_0，使$a_{n_0}>a_0-\varepsilon$。因 $(a_n: n\in N)$ 是单调非减少的，故当 $n\geqslant n_0$ 时，$a_n\geqslant a_{n_0}>a_0-\varepsilon$。另方面，因 a_0 是 $(a_n: n\in N)$的上界，故当 $n\in N$时，有 $a_n\leqslant a_0$。故有$a_0-\varepsilon<a_n\leqslant a_0$ 成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0$。

定理 3 若$(a_n: n\in N)$单调非减少，且$a_n\to a_0(n\to\infty)$，则对于 $n\in N$有 $a_n\leqslant a_0$。

证明 设 p 为自然数。对于任意正数ε，因$a_n\to a_0(n\to\infty)$，有自然数n_0。若 $n\geqslant n_0$，则$|a_n-a_0|<\varepsilon$。令 $m=\max(p, n_0)$，有$a_p\leqslant a_m<a_0+\varepsilon$。对于任意正数 ε，$a_p<a_0+\varepsilon$成立，故$a_p\leqslant a_0$。

定理 4 若 a 是数列$(a_n: n\in N)$的上界且a_0是$(a_n: n\in N)$的极限，则 $a_0\leqslant a$。

证明 对任意正数 ε，因$a_n\to a_0(n\to\infty)$，由定理 2 有自然数n_0，若$n\geqslant n_0$，则$|a_n-a_0|<\varepsilon$。因$a_0-\varepsilon<a_{n_0}$，a是$(a_n: n\in N)$的上界，故$a_{n_0}\leqslant a$。由此，对任意正数 ε，有 $a_0-\varepsilon<a$ 成立，故 $a_0\leqslant a$。

定理 5 若 a，b 都是数列$(a_n: n\in N)$的极限，则$a=b$。

证明 设 ε 为任意正数，因$a_n\to a$，有自然数 n_1。当$n\geqslant n_1$，有$|a_n-a|<\varepsilon/2$。因$a_n\to b$，有自然数 n_2。当 $n\geqslant n_2$，有$|a_n-b|$

$<\varepsilon/2$。令 $m=\max(n_1, n_2)$，由三角不等式 $|a-b|=|(a-a_m)+(a_m-b)|\leqslant|a-a_m|+|a_m-b|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$。对于任意正数 ε，因 $|a-b|<\varepsilon$，故 $a=b$。

定理6（套间公理） 若闭区间 $I_n=[a_n,b_n]$ 的序列 $(I_n:n\in N)$ 满足下列条件：

a．若 $n\in N$，则 $I_{n+1}\subset I_n$，

b．$b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$。

则必定有实数 a，使 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{a\}$。

证明 由条件 a 知序列 $(a_n:n\in N)$，$(-b_n:n\in N)$ 都是上方有界的单调非减少的，故有极限。将它们分别写做 a，$-b$。由定理3知当 $n\in N$，有 $a_n\leqslant a$，$-b_n\leqslant -b$。因 $a_n\to a$，$-b_n\to -b\ (n\to\infty)$，故 $a_n-b_n\to a-b\ (n\to\infty)$。由条件 b 和定理5有 $a=b$。因当 $n\in N$ 时，$a_n\leqslant a\leqslant b_n$ 成立，故 $a\in[a_n,b_n]$。于是 $a\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$。当 $c>a$ 时，因 $b_n\to a\ (n\to\infty)$，故有自然数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，$|b_n-a|<\dfrac{c-a}{2}$．$b_{n_0}<a+(c-a)/2=\dfrac{c+a}{2}<c$．于是 $c\notin[a_{n_0}, b_{n_0}]$，$\therefore c\notin\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$。当 $c<a$ 时，同样有 $c\notin\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$。故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{a\}$。

定理7 对于实数列 $(a_n;n\in N)$，$(b_n:n\in N)$，若 $n\in N$，有 $a_n\leqslant b_n$，且 $a_n\to a(n\to\infty)$，$b_n\to b(n\to\infty)$，则 $a\leqslant b$。

证明 设 ε 是任意正数。因当 $n\to\infty$ 时 $a_n\to a$，$b_n\to b$，故有 n_1，n_2，当 $n\geqslant n_1$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon/2$；当 $n\geqslant n_2$ 时，$|b_n-b|<\varepsilon/2$。令 $n_0=\max(n_1, n_2)$，则 $b-a>(b_{n_0}-\varepsilon/2)-(a_{n_0}+\varepsilon/2)=b_{n_0}-a_{n_0}-\varepsilon\geqslant-\varepsilon$。因 ε 是任意正数，故 $b-a\geqslant 0$。

定理8 （Archimedes公理）对于任意正数 ε，M，必有自然数 n_0，使 $n_0\varepsilon>M$。

证明 用反证法。若这样的自然数不存在，则M是单调非减少数列$(n\varepsilon: n\in N)$的上界。由定理2知$(n\varepsilon: n\in N)$具有极限a_0，故有自然数n_0，使$a_0-\varepsilon<n_0\varepsilon<a_0+\varepsilon$。由此$(n_0+1)\varepsilon>a_0$，但根据定理3，$n\varepsilon\leqslant a_0$恒成立。故得到矛盾。

设A为实数集，a为实数.如果对于任意正数ε，有$x_\varepsilon\in A$，$x_\varepsilon\neq a$，使$|x_\varepsilon-a|<\varepsilon$，则称$a$为$A$的**聚点**(accumulation point)。

定理9 (Weierstrass聚点原则)有界无限点集必有聚点。

证明 设A为有界无限点集，则有$[a, b]$使$A\subset[a, b]$。取$[a, b]$的中点r，分$[a, b]$为$[a, r]$和$[r, b]$。则$[a, b]=[a, r]\cup[r, b]$，$(A\cap[a,r])\cup(A\cap[r,b])=A$。因$A$为无限点集，故$A\cap[a, r]$及$A\cap[r, b]$中必有一个含无限个点，设它为$A\cap[a_1, b_1]$。取$[a_1, b_1]$的中点，仿此做下去，得到区间列

$$[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$$

满足

$A\cap[a_n, b_n]$为无限点集，

$[a_n, b_n]$的长度为$(b-a)/2^n$，

$[a_n, b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$。

由 Archimedes 公理知$(b-a)/2^n\to 0$，又由套间公理(定理6)有$c\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$。由作法知$c$为$A$的聚点。

设$(a_n: n\in N)$，$(a_{n_k}: k\in N)$是序列。如果n_k都是自然数，且满足$n_k<n_{k+1}$($k=1, 2, \cdots$)，称$(a_{n_k}: k\in N)$为$(a_n: n\in N)$的**子列**(subsequence)。

定理10 (Weierstrass致密性原理)任一有界数列必有收敛子列。

证明 设$(a_n: n\in N)$为有界数列。如果在(a_n)中有数a无限次出现，则数列$(a_{n_k}: a_{n_k}=a, k\in N)$即为$(a_n)$的收敛子

列。

如没有数在$(a_n: n\in N)$中无限次出现，则数集$\{a_n\}$是无限点集。由定理9，数集$\{a_n\}$必有聚点a。则对于任意自然数k，可取a_{n_k}满足

$$n_k>n_{k-1},$$

$$|a_{n_k}-a|<\frac{1}{k}.$$

则$(a_{n_k}: k\in N)$构成收敛于a的序列，且(a_{n_k})是(a_n)的子列。

关于无界数列，有下列性质，其证明留给读者。

性质 无界数列(a_n)必有子列(a_{n_k})满足

$$|a_{n_k}|\to\infty.$$

设$(a_n: n\in N)$为实数列，如果对于任意$\varepsilon>0$，有正数n_0，当n，$m\geqslant n_0$时，$|a_n-a_m|<\varepsilon$恒成立，则称$(a_n: n\in N)$为基本列(fundamental sequence)或Cauchy序列(Cauchy sequence)。

定理11 (Bolzano-Cauchy 收敛准则) 数列$(a_n: n\in N)$是收敛列，当且仅当$(a_n: n\in N)$是基本列。

证明 若$(a_n: n\in N)$是收敛列，则有数a，使

$$a_n\to a.$$

由收敛的定义，对于任意$\varepsilon>0$，有N_0，当$n>N_0$时，

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故当n，$m\geqslant N_0$时，有

$$|a_n-a_m|\leqslant|a_n-a|+|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故$(a_n: n\in N)$是基本列。

反之，若$(a_n: n\in N)$是基本列，则必是有界的。

实际上，对于正数1，必有N_0，当$n,m\geqslant N_0$时，$|a_m-a_n|<1$。故当$n\geqslant N_0$时，

$$|a_n|=|(a_n-a_{N_0})+a_{N_0}|\leqslant|a_n-a_{N_0}|+|a_{N_0}|<1+|a_{N_0}|.$$

令$M=\max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_0}|, |a_{N_0}|+1)$，则对于任意$n$，均有

$$|a_n|\leqslant M.$$

由定理10 知$(a_n: n\in N)$必有收敛子列$(a_{n_k}: k\in N)$。设$a_{n_k}\to a$，则对任意正数ε，有N_1，当$n_k>N_1$时，有

$$|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因(a_n)是基本列，故有N_2，当n，$m\geqslant N_2$时，有

$$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N_0=\max(N_1, N_2)$，当$n>N_0$时，任取$n_k>N_0$，则有

$$|a_n-a|=|a_n-a_{n_k}+a_{n_k}-a|\leqslant|a_n-a_{n_k}|$$

$$+|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即$(a_n: n\in N)$为收敛列。

定理12 (Heine-Borel 覆盖定理) 设S为开区间的集合，$F=[a, b]$，S是F的覆盖。则S中有有限个开区间覆盖F。

证明 用反证法，设$[a, b]$不能被S的有限个区间覆盖。将$[a, b]$等分为两个区间，则其中至少有一个区间不能被S的有限个区间覆盖，把它记作$[a_1, b_1]$，再将$[a_1, b_1]$等分为两个区间，再将不能用S的有限个区间覆盖的那个区间记作$[a_2, b_2]$。如此继续分下去，得到一个区间列$\{[a_n, b_n]\}$，满足

每个$[a_n, b_n]$不能被S的有限个区间覆盖。

$[a_n, b_n]\supset[a_{n+1}, b_{n+1}]$，$(n\geqslant1)$，

$b_n-a_n=(b-a)/2^n$。

由 Archimedes 公理知，$(b-a)/2^n\to0$。由套间公理，有$c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$。因$S$是覆盖，$\therefore$有$(\alpha, \beta)\in S$，且$c\in(\alpha, \beta)$。在区间列$\{[a_n, b_n]\}$中必有$[a_n, b_n]$使$[a_n, b_n]\subset(\alpha, \beta)$。这与$[a_n, b_n]$的取法相矛盾。故定理成立。

定理13 下述各公理等价：

a. Dedekind 公理；

b. Weierstrass确界存在公理；

c. 定理 2 （有界单调序列有极限）；

d. 套间公理 + Archimedes 公理；

e. Weierstrass聚点原则；

f. Weierstrass 致密性原理；

g. Bolzano-Cauchy 收敛准则 + Archimedes 公理；

h. Heine-Borel 覆盖定理.

证明 a ⇒ b 见定理 1.

b ⇒ c 见定理 2.

c ⇒ d 见定理 6 及定理 8.

d ⇒ e 见定理 9.

e ⇒ f 见定理10.

f ⇒ g 见定理11及下述Archimedes公理成立.

用反证法，对应 ε, M, 若无 n_0 使 $n_0\varepsilon > M$，则 $n\varepsilon \leqslant M$, $(n\in N)$. 于是 ε, 2ε, …, $n\varepsilon$, …是一个有界序列. 由定理10, $\{n\varepsilon\}$必有收敛子列 $\{n_k\varepsilon: k=1,2,\cdots\}$. 设 $n_k\varepsilon \to a$. 由收敛的定义，对应 ε 有自然数 n_0, 当 $n_k \geqslant n_0$ 时, $a-\varepsilon < n_k\varepsilon < a+\varepsilon$. 由此$(n_k+1)\varepsilon > a$. 即当$n_k \geqslant n_0$时，恒有$\frac{M}{a}(n_k+1)\varepsilon > M$.

因当 $k\to\infty$时, $n_k\to\infty$, 故在 $\{n_k: k\in N\}$ 中有n_1, 使$n_1 \geqslant \frac{M}{a}$ (n_0+1), 故$n_1\varepsilon \geqslant \frac{M}{a}(n_0+1)\ \varepsilon > M$. 这与 $n\varepsilon \leqslant M$矛盾.

g ⇒ d 设$\{[a_n, b_n]: n\geqslant N\}$是闭集列，使$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ 且 $b_n - a_n \to 0\ (n\to\infty)$. 对于任意正数 ε, 有N_0. 当 $m \geqslant n \geqslant N_0$ 时，有 $b_n - a_n < \varepsilon$, 故$0 \leqslant a_m - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$. 即$(a_n: n\in N)$是基本列. 同样, $(b_n: n\in N)$也是基本列. 由 g 有 a, b, 使 $a_n \to a$, $b_n \to b\ (n\to\infty)$, $b_n - a_n \to b - a$, $\therefore b = a$. 于是

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]=\{a\}$。

d ⇒ a　下述证明称为 Cantor 二分法。因 $A\neq\phi$，$B\neq\phi$，有 $a_1\in A$，$b_1\in B$。因 $R=A\cup B$，故 $\frac{a_1+b_1}{2}\in A$ 或 $\frac{a_1+b_1}{2}\in B$。当 $\frac{a_1+b_1}{2}\in A$ 时，令 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$；当 $\frac{a_1+b_1}{2}\in B$ 时，令 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$。则 $a_1\leqslant a_2\leqslant b_2\leqslant b_1$，$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}$，$a_1$，$a_2\in A$，$b_1$，$b_2\in B$。对于自然数 n，设已取实数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n，使 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_n\leqslant b_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1$，$b_i-a_i=\frac{b_1-a_1}{2^{i-1}}$，$a_i\in A$，$b_i\in B(1\leqslant i\leqslant n)$ 成立。当 $\frac{a_n+b_n}{2}\in A$ 时，令 $\frac{a_n+b_n}{2}=a_{n+1}$，$b_{n+1}=b_n$；当 $\frac{a_n+b_n}{2}\in B$ 时，令 $a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，则 $a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$，$b_{n+1}-a_{n+1}=(b_n-a_n)/2=(b_1-a_1)/2^n$，$a_{n+1}\in A$，$b_{n+1}\in B$ 成立。由数学归纳法取得闭区间列 $(I_n=[a_n,b_n]: n\in N)$，使 $I_n\subset I_{n-1}$ 且 $b_n-a_n=(b_1-a_1)/2^n$ 成立。

由套间公理及Archimedes公理，知 $(b_1-a_1)/2^n\to0$，且有实数 c，使 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n=\{c\}$。今指出 c 就是切断 (A, B) 的数。若 $x>c$ 而 $x\in A$，因为 $n\to\infty$ 时，$b_n-a_n\to0$，故有自然数 n_0，使 $b_{n_0}-a_{n_0}<(x-c)/2$。因 $c\in[a_{n_0}, b_{n_0}]$，故 $b_{n_0}<a_{n_0}+(x-c)/2\leqslant c+(x-c)/2=(x+c)/2<x$。$A$ 的元素 x 比 B 的元素 b_{n_0} 大与 (A, B) 是切断的假定矛盾。于是，若 $x>c$，则 $x\in B$。同样可以推得，若 $x<c$，则 $x\in A$。因 $c\in A$ 或 $c\in B$，故有 $A=(-\infty,c]$，$B=(c, +\infty)$ 或 $A=(-\infty, c)$，$B=[c, +\infty)$，即 c 是切断 (A, B) 的数。

于是 a，b，c，d，e，f，g 是等价的。

$d \Rightarrow h$ 见定理12。

$h \Rightarrow e$ 设 A 为有界无限点集而无聚点，则有 $[a, b]$，使 $[a, b] \supset A$，且对任一 $c \in [a, b]$，必有正数 ε_c，使 $[(c-\varepsilon_c, c+\varepsilon_c) \cap A] \setminus \{c\} = \phi$。集族 $\{(c-\varepsilon_c, c+\varepsilon_c): c \in [a, b]\}$ 做成 $[a, b]$ 的开覆盖。根据有限覆盖定理，其中有限个 $(c_1-\varepsilon_1, c_1+\varepsilon_1)$, …, $(c_n-\varepsilon_n, c_n+\varepsilon_n)$ 构成 $[a, b]$ 的覆盖。故 $A \subset [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (c_i-\varepsilon_i, c_i+\varepsilon_i)$。右端是 n 个集合的并集最多含有 A 的 n 个点，与 A 是无限点集矛盾。

【习　　题】

1．若有界数列 $(a_n: n \in N)$ 不收敛，则必存在两个子列 $x_{n_k}^{(1)} \to a$, $x_{n_k}^{(2)} \to b$, 而 $a \neq b$.

2．若在区间 $[a, b]$ 内的两个数列 $(x_n^{(1)}: n \in N)$ 及 $(x_n^{(2)}: n \in N)$ 满足 $x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \to 0\ (n \to \infty)$，则在此两数列中必存在具有相同下标 n_K 的子列，使

$$x_{n_k}^{(1)} \to x_0,\ x_{n_k}^{(2)} \to x_0\ (k \to \infty).$$

3．若 $x_{2n} \to a$, $x_{2n+1} \to a\ (n \to \infty)$，则 $x_n \to a\ (n \to \infty)$；但 $x_{2n} \to a$, $x_{3n} \to a$，却未必有 $x_n \to a\ (n \to \infty)$。

4．若 a 是点集 A 的聚点，则 A 存在一个序列 $(x_n: n \in N)$，使 $x_n \to a$。

§4　基数与序数

(cardinal number and ordinal number)

设 A，B 为二集，若 A 到 B 有双射存在，则称 A 等势 (equipotent) 于 B.

显然，等势关系是等价关系。两有限集等势的充要条件是

二者的元素个数相同。

按等势关系将集合分类，一切与集A等势的集归于一类，以记号$\overline{\overline{A}}$表示这类的特征，称为A的基数(cardinal number)或势(power)。基数通常用$\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$表示之。

设$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{M}$，$\overline{\overline{B}}=\mathfrak{N}$。若A有真子集$A_1$，使$A_1$等势于$B$，则规定$\mathfrak{M}\geqslant\mathfrak{N}$。且若$A$与$B$不等势时，规定$\mathfrak{M}>\mathfrak{N}$。

在基数间如此规定的大小关系显然满足可迁性，即若$\mathfrak{M}\geqslant\mathfrak{N}$且$\mathfrak{N}\geqslant\mathfrak{P}$，则$\mathfrak{M}\geqslant\mathfrak{P}$。故这个关系是序关系。

为了证明这个序关系是反对称的，需要证明Cantor-Bernstein 定理。

定理1 (Cantor-Bernstein)若$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$且$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。

证明 由$\leqslant$的规定，$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}\Longleftrightarrow A$到$B$有单射$f$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}\Longleftrightarrow B$到A有单射$g$。

对于A的任一点a_1，观察$g^{-1}(a_1)$，若$g^{-1}(a_1)=b_1\in B$，再看$f^{-1}(b_1)=a_2$，$g^{-1}(a_2)=b_2$，…，如此继续下去。如果可以无限制做下去，则令这里出现的$a_1,a_2,\cdots$属于A_1，$b_1,b_2,\cdots$属于B_1。

如果由a_1开始，到$a_n=f^{-1}(b_{n-1})$，但$g^{-1}(a_n)$不存在，则称这样的a_1，a_2，…，a_{n-1}，a_n，b_1，b_2，…，b_{n-1}是终于a_n的，令这样的a_i属于A_2，b_i属于B_2。

如果由a_1开始，到$b_n=g^{-1}(a_n)$，但$f^{-1}(b_n)$不存在，则这样的$a_1,a_2,\cdots,a_n$，b_1，b_2，…，b_n称为是终于b_n的，令这样的a_i属于A_3，b_i属于B_3。

即将终于A的元素各分在A_2，B_2中；将终于B的元素各分在A_3，B_3中；可无限做下去的元素各分在A_1，B_1中。按这种分类法，每个元素都恰好分在一个类中。

实际上，因f，g都是单射，每个元素的原象都最多有一个，故A的元素必属于而且只属于A_1，A_2，A_3之一；B的元素必属于而且只属于B_1，B_2，B_3之一。故

$$A=A_1+A_2+A_3,\quad B=B_1+B_2+B_3$$

都是直并。

由分类法可看出 f 是 A_1 到 B_1 的双射. 实际上若 $a \in A_1$，则 $f(a)$ 必在 B_1 中，因用上述追溯原象的方法，必都可无限制地追溯下去. 故

$$f(A_1) \subset B_1.$$

又因 B_1 的每个元素在 f 下的原象必在 A_1 中，故 f 是满射. 由条件 f 是单射，故 f 是 A_1 到 B_1 的双射。

同理 f 是 A_2 到 B_2 的双射，g 是 B_3 到 A_3 的双射。做映射

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A_1 \\ f(x) & x \in A_2 \\ g^{-1}(x) & x \in A_3 \end{cases}$$

则 φ 是 A 到 B 的双射。故 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$。

推论 1 基数 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 间下述三个关系中任何两个不能同时成立。

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{M} > \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{M} < \mathfrak{N}.$$

应用极大原理还可证明任何两个基数都能比较其大小. 故基数间的大小关系是可比的，反对称的可迁关系，于是基数间的大小关系是全序关系。

推论 2 若 $A \subset B \subset C$，且 A 等势于 C，则 B 等势于 C。

推论 3 基数大小关系是序关系.

与自然数集的一个截段等势的集称为**有限集**(finite set)。

与自然数集等势的集称为**可列集**(countable set)，可列集的基数通常以 $\mathfrak{A}$ 表示之。

定理 2 任何无限集必含有可列子集，而可列集的任何无限子集是可列的。

有限集和可列集统称为至多可列集. 在本书中也常用可列集表示至多可列集.

定理 3 至多可列个至多可列集的并集是至多可列集。

定理 4 有限个可列集的直积是可列集.

不是可列集的无限集称为不可列集(uncountable set)。实数集是不可列集，与实数集等势的集称为连续集 (continuous set)。连续集的基数通常以$\mathfrak{C}$表示之。

定理 5 可列个基数为$\mathfrak{C}$的集的并集基数为$\mathfrak{C}$。

定理 6 正整数列的全体构成连续集。

定理 7 可列个基数为$\mathfrak{C}$的集的直积的基数为$\mathfrak{C}$。

推论 $\mathfrak{C}$个连续集的并集的基数为$\mathfrak{C}$。

定理 8 $\overline{\overline{\mathfrak{P}(M)}}>\overline{\overline{M}}$。

设$(A, \prec)$，$(B, <)$是两个全序集。若有A到B的双射φ，当$a_1, a_2\in A$且$a_1\prec a_2$时，恒有$\varphi(a_1)<\varphi(a_2)$，则称$\varphi$为$A$到$B$的**相似变换** (similarity transformation)。若全序集A，B间存在相似变换，则称A与B是**相似的**(similar)。记作

$$A\simeq B.$$

相似关系是等价关系。相似集必是等势的，但等势未必相似。

按相似关系将全序集分类。一切与全序集$(A, <)$相似的全序集归于一类，以记号$\widetilde{A}$表示这类的特征，称为A的**序型**(order type)。

自然数集按自然次序是全序集，它的序型以ω表示之。自然数集按相反的次序也是全序集，它的序型以ω^*表示之。

若全序集A的任一非空子集必有最前元素，则称A为**良序集**(well ordered set)。良序集的序型称为**序数**(ordinal number)。良序无限集的序数称为**超限数**(transfinite number)。良序集的子集是良序集。良序集除最后元素外，每个元素都有后继元。良序集中不存在无限单调减少元素列。

定理 9 任何二良序集，或为相似，或为其中之一相似于另一集的截段。

若良序集A相似于良序集B的一个截段，则称A短于B。

设μ，ν是两个序数，取两个良序集A，B，使$\widetilde{A}=\mu$，

$\tilde{B}=v$。若A短于B，则称μ小于v或v大于μ。记作$\mu<v$，或$v>\mu$。

任意序数集合，按此序关系都构成良序集．

两个有限良序集仅限于元素个数相同时是相似的．由此意义，有限良序集的序数用整数0，1，2，… 表示之。称之为**有限序数**。ω是最小的无限序数。

序数$\mu=v+1$是序数v的直后序数，而v是μ的直前序数。0以及有直前序数的序数称为**孤立序数**(isolated ordinal)，无直前序数的序数称为**极限序数**(limit ordinal)。ω是最小的极限序数。

可列的良序集的序型称为**可列超限数**．其全体也构成良序集，用 Z_1 表示。

ω是最小的可列超限数；若μ是可列超限数，则$\mu+1$也是。

定理10　设S是Z_1的可列子集，γ是大于S中所有序数的最小序数，则$\gamma\in Z_1$。

推论　Z_1不是可列集。

定理11　设极限序数μ是可列超限数，则必有单调增加的序数列

$$\beta_1<\beta_2<\cdots$$

存在，使得所有大于$\beta_n(n=1,2,\cdots)$的一切序数中，μ是最小的一个。

设$\mathfrak{M}$为基数，以$K(\mathfrak{M})$表示基数为$\mathfrak{M}$的所有序数的集合．对于任意基数$\mathfrak{M}$，$K(\mathfrak{M})$是非空集．因$K(\mathfrak{M})$是序数的良序集，故有最小元。若$\mathfrak{M}$是无限基数，则$K(\mathfrak{M})$的最小元必是极限序数。称之为$\mathfrak{M}$的**始数**(initial ordinal)。

【习　　题】

1．试证A是无限集的充要条件是A有真子集与A等势。

2．任一无限集M必含有可数子集D，使$M\setminus D$是无限集。

3. 设$f(x)$，$g(x)$是点集E上的实值函数，$\{r_n\}$为全体有理数排成的序列，试证

$$\{x: f(x)>g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\{x: f(x)>r_n\}\cap\{x: g(x)<r_n\}].$$

4. 证明集A是无限集的充要条件是对于A到A的每个映射f有A的非空真子集B，使$f(B)\subset B$.

5. 设实函数f具有如下的特征：对于每一个x_0，有正数δx_0，当$|x-x_0|<\delta x_0$时，$f(x)\geqslant f(x_0)$，则$f(x)$的函数值全体至多是可列集.

6. 直线上全体区间构成的集族的基数为$\mathfrak{C}$.

7. 设$A=B+C$，$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{C}$，则$B$与$C$中最少有一个基数为$\mathfrak{C}$.

8. 试证可列个可列集的直积的基数为$\mathfrak{C}$.

9. 若$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{C}$，则最少有一个$A_n$的基数为$\mathfrak{C}$.

10. 相似变换保持序完备性.

11. 设A为可列全序集，B为稠密全序集，且无最前及最后元素，试证A必相似于B的一个序子集.

12. 任意两个无最前及最后元素的可列的稠密全序集必相似.

13. 全序集A的一切截段的集必与A相似.

14. 有限良序集不能与其真子集相似，但无限良序集必可与其某一个真子集相似.

15. 全序集不是良序集，当且仅当它含有ω^*型子集.

§5 极大原理
(maximal principle)

熟知集族按包含关系构成有序集. 一般的，集族中是否含有极大元？即集族$\mathfrak{M}$中是否有集A，$\mathfrak{M}$中没有真含A的集？这

是不一定的。如区间集$\{(a,b): a>0, b<1\}$中就没有极大元。

集族$\mathfrak{M}$的全序子族$\mathfrak{N}$称为**套**(nest)。在集族$\mathfrak{M}$的所有套$\mathfrak{N}$的集中，若有套$\mathfrak{N}_0$对于集族$\mathfrak{M}$的任意套$\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}\supset\mathfrak{N}_0$（真正包含）均不成立时，称$\mathfrak{N}_0$为$\mathfrak{M}$的**极大套**(maximal nest)。

我们采取下列叙述做为公理。

Hausdorff 极大原理(maximal principle) 设$\mathfrak{M}$是集族，对于$\mathfrak{M}$中任一套$\mathfrak{Q}$，必有极大套$\mathfrak{N}$，使

$$\mathfrak{N}\supset\mathfrak{Q}.$$

定理1 （极大原理）若对于集族$\mathfrak{M}$的每个套$\mathfrak{N}$，有$\mathfrak{M}$的成分$A_{\mathfrak{N}}$，它包含$\mathfrak{N}$的每个成分，则集族$\mathfrak{M}$必有极大成分。

证明 由 Hausdorff 极大原理，每个套都包含在某个极大套中，故可设$\mathfrak{N}$为极大套，就极大套来证明本定理。

由条件，有$A_{\mathfrak{N}}\in\mathfrak{M}$，对于任意$A\in\mathfrak{N}$，均有$A_{\mathfrak{N}}\supset A$。故

$$A_{\mathfrak{N}}\supset\bigcup_{A\in\mathfrak{N}}A.$$ 这个$A_{\mathfrak{N}}$即为$\mathfrak{M}$的极大成分。

否则，若有$B\in\mathfrak{M}$，使$B\supset A_{\mathfrak{N}}$，则将$B$添加于$\mathfrak{N}$中，仍然是一个套且真正包含$\mathfrak{N}$，这与$\mathfrak{N}$的极大性矛盾。

定理2 （极小原理）若对于集族$\mathfrak{M}$的每个套$\mathfrak{N}$，有$\mathfrak{M}$的成分$A_{\mathfrak{N}}$，它被包含在$\mathfrak{N}$的每个成分中，则集族$\mathfrak{M}$必有极小成分。

证明 做$S=\bigcup\{A:A\in\mathfrak{M}\}$，$\mathfrak{M}'=\{S-A:A\in\mathfrak{M}\}$。因$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{M}$的套，故$\mathfrak{N}'=\{S-N:N\in\mathfrak{N}\}$是$\mathfrak{M}'$的套。由条件有$A_{\mathfrak{N}}\in\mathfrak{M}$，对于每个$N\in\mathfrak{N}$，均有$A_{\mathfrak{N}}\subset N$。故对任一$S-N$，均有$S-A_{\mathfrak{N}}\supset S-N$，即对于套$\mathfrak{N}'$，有$\mathfrak{M}'$的成分$S-A_{\mathfrak{N}}$，它包含$\mathfrak{N}'$的每个成分。由定理1，$\mathfrak{M}'$有极大成分$M$，而$S-M$是$\mathfrak{M}$的极小成分。

有序集A的全序子集称为**链**(chain)。有序集A的链B，若对于A的任意全序子集A'，A'真正包含B均不成立时，B称

为A的**极大链**(maximal chain)。

定理 3 (Kuratowski 引理) 有序集A的每个链被含在某个极大链中。

设A为非空有序集，若A的任一链都有上界，则称A为**归纳的**(inductive)。

定理 4 (Zorn引理)归纳的有序集有极大元。

当且仅当集族$\mathfrak{M}$满足条件：

a. 若集A为集族$\mathfrak{M}$的成分，则A的任一有限子集B皆在$\mathfrak{M}$中；

b. 若集A的任一有限子集B皆在$\mathfrak{M}$中，则A在$\mathfrak{M}$中。

称$\mathfrak{M}$为**有限特征的**(finite character)。

定理 5 (Tukey 引理)每个有限特征族有极大成分。

证明 设$\mathfrak{M}$为有限特征族，$\mathfrak{N}$为$\mathfrak{M}$的套。

令

$$A=\bigcup_{N\in\mathfrak{N}}N.$$

设F为A的有限子集，则F必含在有限个N中。因$\mathfrak{N}$是套，故这有限个N必有最大者N_0，使$F\subset N_0$。因$\mathfrak{M}$是有限特征族，故$F\in\mathfrak{M}$。又因A的任一有限子集F皆在$\mathfrak{M}$中，故$A\in\mathfrak{M}$。即对于$\mathfrak{M}$中的套$\mathfrak{N}$，有$A\in\mathfrak{M}$，它包含$\mathfrak{N}$的每个成分。由定理1，$\mathfrak{M}$有极大成分。

定理 6 (选择公理 axiom of choice)若对于指标集D的每个元素λ，$A_\lambda\neq\phi$，则D上有函数c，使得对于每个$\lambda\in D$，有$c(\lambda)\in A_\lambda$。

证明 设$\mathscr{F}$为定义在D的子集上，在λ点的值在A_λ中的函数的全体，则$\mathscr{F}$具有有限特征性。

实际上，若$f\in\mathscr{F}$，则f的任意有限子集为定义在D的有限子集上的函数，故都在$\mathscr{F}$中。反之，若f的任意有限子集皆在$\mathscr{F}$中，则f也是D的子集上定义的函数，故$f\in\mathscr{F}$。因此$\mathscr{F}$

具有有限特征性。由定理5 $\mathscr{F}$ 有极大成分 c。

c 的定义域必为 D。否则，若 c 的定义域为 L，L 真含于 D 中，则有 $x\in D\setminus L$。取 $y\in A_x$，则 $c\cup\{(x,y)\}$ 也是函数，与 c 的极大性矛盾，所以 c 的定义域为 D。

函数 c 称为**选择函数**(choice function)。

定理7 (Zermelo 公理) 若 $\mathfrak{M}$ 是非空集的互不相交族，则有集 C 满足：

a. 对于每个 $A\in\mathfrak{M}$，使 $A\cap C$ 含有单元素；

b. $C\subset\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{M}}A$。

应用选择公理即可证得。

如果在集 A 中引入一个全序关系，使 A 成为良序集，则称为将 A **良序化**(well—ordered)。

定理8 (良序原理) 每个集都可以良序化。

证明 往证非空集 E 可良序化。令 $\mathfrak{D}$ 是 E 的所有非空子集族，且令 c 是关于 $\mathfrak{D}$ 的选择函数。即 c 是 $\mathfrak{D}$ 上的函数，使得对每个 $A\in\mathfrak{D}$，有 $c(A)\in A$。证明的观点是构造一个序关系 $\leqslant$，使得对每个截段 A 在此序关系下，后于 A 的最前元素是 $c(E\setminus A)$。显然，关于序 $<$，A 是截段，当且仅当前于 A 的元素的每个元素是 A 的元素。特别地，空集是截段。设 $\mathfrak{C}$ 是满足下述条件的所有自反线性序关系 $\leqq$ 的类：

a. $\leqq$ 的定义域 D 是 E 的子集；

b. 对每个异于 D 的截段 A，$D\setminus A$ 的最前元素是 $c(E\setminus A)$。

$\mathfrak{C}$ 的每个成分必是良序关系。

实际上，若 B 是 $\leqq\in\mathfrak{C}$ 的定义域的非空子集，且 $A=\{y: y\leqq x$ 且 $y\neq x$，对每个 $x\in B\}$，则 $c(E\setminus A)$ 是 B 的最前元素。

$\mathfrak{C}$ 的任意两个成分必有一个成分的定义域是另一个的截段，两个序关系在该截段上一致。

实际上，设$\leqq$，$\leqslant$是$\mathfrak{C}$的成分，D_1是$\leqq$的定义域，D_2是$\leqslant$的定义域。令

$A=\{x:\{y:y\leqq x\}=\{y:y\leqslant x\}$ 且在二者上序关系一致$\}$，则A是关于$\leqq$及$\leqslant$二者的截段。若A和D_1, D_2都不一致，则$c(E\backslash A)$是这两个集$D_1\backslash A$，$D_2\backslash A$的最前元素，它不属于A。但由A的定义$c(E\backslash A)\in A$。矛盾。故$A=D_1$或$A=D_2$。

由此不难看出$\mathfrak{C}$的成分的并$\prec$是$\mathfrak{C}$的成分，$\prec$是$\mathfrak{C}$的最大成分。

若F是$\prec$的定义域，则$F=E$。

否则，点$c(E\backslash F)$可添加于序关系$\prec$的末尾：（更确切的，$\prec\cup(F\times\{c(E\backslash F)\})$是$\mathfrak{C}$的成分，它含有$\prec$。证得定理。

良序集的基数称为**良序基数**。

定理9 任何两个良序基数都是可以比较的。

推论 一切基数之间都可以比较其大小。

定理10 （超限归纳法）(transfinite induction)设$T(\mu)$是一个与序数μ有关的命题，如果满足：

a．$T(\mu_0)$是正确的。

b．若$T(\mu)$对于$\mu_0\leqslant\mu<v$都是正确的，则$T(v)$也是正确的，这时$T(\mu)$对于一切序数$\mu\geqslant\mu_0$都是正确的。

归纳定义 (definition by induction)序数μ的函数$f(\mu)$，如果

a．$f(\mu_0)$是有定义的，

b．当$\mu_0\leqslant\xi<\mu$时，若所有$f(\xi)$是有定义的，则$f(\mu)$也是有定义的。

则此函数$f(\mu)$对于一切$\mu\geqslant\mu_0$都是有定义的。

定理1到定理8都是Hausdorff极大原理的等价形式。这种等价形式到现在已不止二、三十种，在现代数学理论中起着重要作用，如下边诸命题的证明都依赖于它们。

关于集合的有限性、无限性的诸种定义是等价的；

域K上的线性空间必有基存在；

可分度量空间的子空间的可分性；

Euclid 空间中非 Lebesgue 可测的子集是存在的；

Boole 代数的 Stone 表示定理；

紧拓扑空间的积空间是紧拓扑空间；

Boole 代数的质理想定理；

Hahn—Banach 保范扩张定理；

代数封闭域的唯一存在性；

域的序化定理；

自由群的子群恒为自由群；

极大理想的存在定理；

根理想的存在定理。

【习　　题】

1．非空良序集到自身的相似变换仅限于恒等变换．

2．设M为归纳序集，若有 $\varphi: M\to M$ 对任意 $x\in M$，有 $\varphi(x)\geqslant x$，则有 $a\in M$，使 $\varphi(a)=a$。

3．若M为不具有极大元的有序集，则有 $\varphi: M\to M$，对任意 $x\in M$，均有 $\varphi(x)>x$．

4．设α，β为序数，$\alpha>1$，由 $\alpha^0=1$ 开始，试用超限归纳法定义α^β。

5．试用Zorn引理证明 Zermelo 良序原理．

6．试用Zermelo选择公理证明 Zorn 引理．

7．试用 Zorn 引理证明 Tukey 引理．

第一章　度量空间
(metric　space)

极限运算是分析学的基本运算．在分析学中极限的形式虽然是多样的，而本质却是一致的．数学分析中一系列基本事实都是基于实数间的距离．Cantor 在19世纪70年代在 Euclid 空间中研究了由距离产生的聚点、内点、外点、界点、开集、闭集等概念．这些概念的考虑，显然不必限于 Euclid 空间．伴随着古典分析的发展，Ascoli、Volterra、Arzela、Hadamard、Borel 等人在 19 世纪 80 年代以后，相继研究了各种函数类中的各种收敛性．各种收敛性也都是基于函数间的距离．于是 Fréchet从大量事物中，抽象出距离特征的实质，在1906年推进了Cantor的考虑，而导入了度量空间，讨论了由距离产生的诸概念．在此基础上，Hausdorff 再将邻域具有的性质整理为 4 条公理，在1914年定义了拓扑空间．可见n维 Euclid 空间是度量空间的一个模型，而度量空间也只是拓扑空间的一个特例．为了便于理解拓扑空间，先讨论比较具体的度量空间．它早已成为学习现代数学的必备的基础知识．关于度量空间的理论，Урысон，Hausdorff，Александров 及 Hopf 等都做出了重要的贡献．在本书中认为n维 Euclid 空间是已知的．

§1　距离和度量空间
(distance and metric space)

我们知道，n维 Euclid 空间R^n的二元素$x=(x_1,x_2,\cdots,$

x_n)，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离是

$$d(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

容易验证，它具有下列诸性质：

a．对于R^n的任意元素x,y，有$d(x,y)\geqslant 0$；

b．$d(x,y)=0 \iff x=y$；

c．对于R^n的任意元素对x,y，必有

$d(x,y)=d(y,x)$；

d．对于R^n的任意三元素x,y,z，必有

$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$。

同时，这些性质也反映了距离的特征。

距离是几何的语言。用距离来描述极限过程，就使几何中的术语成为研究分析学的工具，以致产生了现代分析。

设E为非空集，d为$E\times E$上定义的实值函数，即

d：$E\times E\to R$，

满足公理(Lindenbaum)：

a．$d(x,y)=0 \iff x=y$；

b．对E中任何元素x,y,z，恒有

$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$。

这时，称为对E给与了距离(distance) d。而E和d的组(E,d)称为度量空间(metric space)。E的元素称为点(point)，d称为距离函数(distance function)，$d(x,y)$称为二点x,y间的距离。当d是确定的，不加声明不致发生误解时，度量空间(E,d)常简记为度量空间E。

由定义直接推得下列诸性质。

a．对任何$x,y\in E$，均有$d(x,y)\geqslant 0$。

实际上，在公理(b)中，令$y=x$，则有$d(x,x)\leqslant d(x,z)+d(x,z)$，即$d(x,z)\geqslant 0$。

b．对任何$x,y\in E$，均有$d(x,y)=d(y,x)$。

实际上，在公理(b)中，令$z=x$，则有$d(x,y)\leqslant d(x,x)$

$+d(y,x)$，即$d(x,y)\leqslant d(y,x)$。再于上式中，将x,y互换，得到$d(y,x)\leqslant d(x,y)$，故$d(x,y)=d(y,x)$。

c．对任何$x_1,x_2,\cdots,x_n\in E$，恒有

$$d(x_1,x_n)\leqslant\sum_{i=2}^{n}d(x_{i-1},x_i)。$$

实际上，当$n=3$时，由公理(b)有$d(x_1,x_3)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_3,x_2)$。由性质(b)有$d(x_3,x_2)=d(x_2,x_3)$，故

$$d(x_1,x_3)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)。$$

用数学归纳法容易证得此结果成立。

d．对任何$x,y,z\in E$，均有$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$。

实际上，由性质(b)及(c)有

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z),$$

即

$$d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y)。$$

又因

$$d(y,z)\leqslant d(y,x)+d(x,z)=d(x,y)+d(x,z),$$

有

$$-d(x,y)\leqslant d(x,z)-d(y,z)。$$

因此有

$$-d(x,y)\leqslant d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y),$$

故

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)。$$

将公理(a)减弱为

(a′)　　　　$d(x,x)=0$

时，称d为伪距离(pseudo-distance)．称E为伪度量空间(pseudo metric space)．

例1　设E是任意集合，对任何$x,y\in E$，若令

$$\begin{cases}d(x,x)=0,\\ d(x,y)=1,(x\neq y)。\end{cases}$$

则 (E,d) 是度量空间。称之为**离散度量空间** (discrete metric space) 或**离散空间**(discrete space)。

例 2 设 E 为任意集合，对任何 $x,y\in E$，若令 $d(x,y)=0$，则 d 是伪距离，而 (E,d) 是伪度量空间，称之为**密集伪度量空间** (indiscrete pseudo metric space) 或**密集空间** (indiscrete space)。

例 3 在实平面 $R^2=R\times R$ 上规定二点 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$ 的距离为

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|,$$

则 R^2 也是度量空间。

例 4 设 A 为任意集合，A 到实数集 R 的一切有界函数的集合记作 $E=\mathscr{B}(A)$。对于属于 E 的任意两个函数 f,g，$f-g$ 仍属于 E，规定

$$d(f,g)=\sup_{t\in A}|f(t)-g(t)|,$$

则 d 是 E 上的距离函数而 E 是度量空间。称之为**有界函数空间**(bounded function space)。

例 5 以实数序列为元素的集合记作 s，s 中任意二点 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)$ 的距离规定为

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|},$$

则 s 是度量空间。称之为**序列空间**(sequence space)。

例 6 在有界实数序列的集合 m 中，规定二点 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)$ 的距离为

$$d(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|,$$

则 m 是度量空间，称之为**有界序列空间** (bounded sequence space)。

例 7 对于集合 s 的任意二点 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)$ 的距离规定为使 $x_n\neq y_n$ 成立的最小自然数 n 的倒数 $\frac{1}{n}$，

则 s 构成度量空间，称之为 Baire 零维空间。

例 8　定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数的集合记作$C[a,b]$，规定距离为

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|,$$

则$C[a,b]$是度量空间，称之为连续函数空间(continuous function space)。

以例 8 为例证明之，其它的证明留给读者。

a．$d(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|=0 \iff f(x)=g(x)$，

对$x\in[a,b]$都成立．故有

$$d(f,g)=0\iff f=g.$$

b．对于$x\in[a,b]$，恒有

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)|&\leqslant|f(x)-h(x)|+|g(x)-h(x)|\\&\leqslant\max_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|+\max_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|\\&=d(f,h)+d(g,h),\end{aligned}$$

故

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|\leqslant d(f,h)+d(g,h).$$

以下如不另作声明，E 表示度量空间，第一、二章所讨论的内容都是在度量空间中进行。

【习　　题】

1．在 n 数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(x_i 为实数）的集合中，分别规定距离为

$$d^*(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2};$$

$$d_1^*(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|;$$

$$d_\infty^n(x,y)=\max\{|x_i-y_i|: i=1,2,\cdots,n\},$$

试证明它们都构成度量空间。而且满足

$$d_\infty^n(x,y)\leqslant d^n(x,y)\leqslant d_1^n(x,y)\leqslant nd_\infty^n(x,y).$$

2．在点集E中规定$d(x,y)\geqslant 0$，使(E,d)是度量空间的充要条件是下列距离公理成立：

a．$d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$；

b．$d(x,y)=d(y,x)$；

c．$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$。

其中x,y,z是E的任意元素。

3．设E为收敛实数序列的集合，设$x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)$，规定距离为

$$d(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|,$$

则(E,d)是度量空间。

4．设E为定义在$[0,1]$上的有界可测函数的集合，A表示测度为零的集合，规定

$$d_A(f,g)=\sup_{x\in[0,1]\setminus A}|f(x)-g(x)|,$$

及

$$d(f,g)=\inf_A d_A(f,g),$$

则(E,d)是伪度量空间。

5．设s为闭区间$[a,b]$上k次可微函数的集合，用$f^i(x)$表示$f(x)$的i级导数，规定

$$d(f,g)=\sum_{i=0}^{k}\max_{x\in[a,b]}|f^i(x)-g^i(x)|,$$

或

$$\rho(f,g)=\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|,\ |f'(x)-g'(x)|,\cdots,\ |f^k(x)-g^k(x)|\}.$$

则(S,d)及(S,ρ)都是度量空间。

6．在题1中设$n=2$，在三种距离函数下，试分别确定与

原点距离为1的点集。

7. 设 $L_2(a,b)$ 为 (a,b) 上定义的平方可积函数的全体，若$f,g\in L_2(a,b)$，规定

$$d(f,g)=\left[\int_a^b(f(x)-g(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

则$L_2(a,b)$是度量空间。

§2 度量空间的点集
(point set of metric space)

设(E,d)为度量空间，点 $a\in E$，r 为正实数，集合

$$B(a,r)=\{x:x\in E,d(a,x)<r\}$$

称为以 a 为中心（center）以 r 为半径（radius）的开球（open ball）。集合

$$\overline{B}(a,r)=\{x:x\in E,d(a,x)\leqslant r\}$$

称为以 a 为中心以 r 为半径的闭球(closed ball)。集合

$$S(a,r)=\{x:x\in E,d(a,x)=r\}$$

称为以 a 为中心以 r 为半径的球面(sphere)。以 a 为中心的开球及闭球皆含点 a，而以 a 为中心的球面不仅不含 a，甚至可能是空集。

例1　在实直线上，

$$B(a,r)=(a-r,a+r);\qquad \overline{B}(a,r)=[a-r,a+r],$$

$$S(a,r)=\{a-r,a+r\}.$$

例2　在离散空间中，当$r<1$时，$B(a,r)=\overline{B}(a,r)=\{a\}$，$S(a,r)=\phi$。

当$r>1$时，$B(a,r)=\overline{B}(a,r)=E$，$S(a,r)=\phi$。

当$r=1$时，$B(a,r)=\{a\}$，$\overline{B}(a,r)=E$，$S(a,r)=E\setminus\{a\}$。

在 n 维 Euclid 空间中的开球、闭球、球面等概念，和习惯理解是一致的。

设A为度量空间E的子集，令

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y): x,y\in A\},$$

称为A的**直径**（diameter），直径为有限的非空集称为**有界集**（bounded set）。显然$\delta(A)$是非负实数或$+\infty$。由定义直接推得下列性质成立：

a．若$A\subset B\subset E$，则$\delta(A)\leqslant\delta(B)$；

b．有界集的非空子集必是有界集；

c．任意球$B(a,r)$均有$\delta(B(a,r))\leqslant 2r$。

设A,B是E的两个非空子集，令

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,\, b\in B} d(a,b),$$

称之为A和B的**距离**(distance)。当$A=\{a\}$时，$d(A,B)$也写做$d(a,B)$，于是有

$$d(A,B)=\inf_{a\in A} d(a,B).$$

若$A\cap B\neq\phi$，则$d(A,B)=0$。但其逆未必成立，更一般的，若$d(A,B)=a$，未必有$a\in A$，$b\in B$，使$d(a,b)=a$。

例如在实直线R上，设N为自然数的集合，B为形如$n-\frac{1}{n}$ $(n\geqslant 2)$的集合，则$N\cap B=\phi$。但$d(n,n-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$可任意小，故$d(N,B)=0$。

又如开区间$(0,1)$与$(1,2)$也是如此。

由定义可直接推出下列性质成立：

a．若$x\notin B(a,r)$，则$d(x,B(a,r))\geqslant d(a,x)-r$；

若$x\notin\overline{B}(a,r)$，则$d(x,\overline{B}(a,r))\geqslant d(a,x)-r>0$。

实际上，由$d(x,a)\geqslant r$，对任意$y\in B(a,r)$，必有$d(x,y)\geqslant d(a,x)-d(a,y)>d(a,x)-r$。故$d(x,B(a,r))=\inf_{y\in B(a,r)} d(x,y)\geqslant d(x,a)-r$。

同样可推出若$x\notin\overline{B}(a,r)$，则$d(x,\overline{B}(a,r))\geqslant d(a,x)-r>0$。

b. 若A为E的非空子集，$x,y\in E$，则

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y).$$

实际上，对任意$z\in A$，有

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z).$$

因此有

$$\begin{aligned}d(x,A)&=\inf_{z\in A}d(x,z)\leqslant\inf_{z\in A}(d(x,y)+d(y,z))\\&=d(x,y)+\inf_{z\in A}d(y,z)\\&=d(x,y)+d(y,A),\end{aligned}$$

相似的，有

$$d(y,A)\leqslant d(x,y)+d(x,A).$$

故

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y).$$

c. 度量空间中二有界集的并集是有 界 集.

实际上，设x,y为$A\cup B$的任意二点. 任取$a\in A,b\in B$.

当$x,y\in A$时，$d(x,y)\leqslant\delta(A)$；

当$x,y\in B$时，$d(x,y)\leqslant\delta(B)$；

当$x\in A,y\in B$时，$d(x,y)\leqslant d(x,a)+d(a,b)+d(b,y)$，

因此

$$\delta(A\cup B)\leqslant d(a,b)+\delta(A)+\delta(B).$$

故$(A\cup B)$为有界集.

【习　　题】

1. 若A为有界集，则对任一$x_0\in E$，有
$\overline{B}(x_0,d(x_0,A)+\delta(A))\supset A$.

2. 设A为度量空间E的子集，则$\delta(A)=0$的充要条件是A为单点集.

3. 度量空间中有限个有界集的并集是有界集.

4. 设$a,b\in E$,试证：若$\lambda+d(a,b)\leqslant\delta$,则$B(a,\lambda)\subset B(b,\delta)$.

5. 离散空间的任意单点集都是开球.

6. 若$x\notin\overline{B}(a,r)$，则$d(x,\overline{B}(a,r))\geqslant d(a,x)-r$.

7. 若$b\in B(a,r)$，则有$\delta>0$，使$B(b,\delta)\subset B(a,r)$.

8. 若$x\in B(a,r_1)\cap B(b,r_2)$，则有$\lambda>0$，使$B(x,\lambda)\subset B(a,r_1)\cap B(b,r_2)$.

9. 试证：$\bigcap\limits_{r>0}B(a,r)=\{a\}$.

§3 度量空间的拓扑
(topology of metric space)

设A为度量空间(E,d)的子集.若对于任意$x\in A$,有$r_x>0$,使$B(x,r_x)\subset A$时，称A为开集(open set).

显然空集是开集，E本身也是开集．开集具有下列性质：

a．任意开球是开集.

实际上，若$x\in B(a,r)$，则由定义$d(x,a)<r$．令$r_x=r-d(a,x)$．当$y\in B(x,r_x)$时，$d(a,y)\leqslant d(a,x)+d(x,y)<r$．故$y\in B(a,r)$．即$B(x,r_x)\subset B(a,r)$.

b．任意个开集的并集是开集.

设$\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$是开集族，$A=\bigcup\limits_{\lambda\in L}A_\lambda$，则$A$是开集.实际上，设$x\in A$，则有$\mu\in L$，使$x\in A_\mu$，于是有$r$使$B(x,r)\subset A_\mu\subset A$.

c．有限个开集的交集是开集.

就两个开集证明即可．设A_1,A_2为开集，若$x\in A_1\cap A_2$，则存在r_1,r_2，使$B(x,r_1)\subset A_1,B(x,r_2)\subset A_2$,令$r=\min(r_1,r_2)$，则$B(x,r)\subset A_1\cap A_2$.

但要注意无限个开集的交集未必还是开集.

如 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=\{1\}$不是开集.

设A是E的非空子集，含A的开集称为A的开邻域（open neighborhood）。含A的一个开邻域的任意集称为A的邻域（neighborhood）。特别地，当$A=\{x\}$时，称之为点x的邻域（代替集$\{x\}$）。由定义直接推得：

对于任意非空集$A\subset E$及任意$r>0$，集

$$V_r(A)=\{x:x\in E,d(x,A)<r\}$$

是A的开邻域。

设$\{U_\lambda\}$是A的邻域族，若A的任意邻域必含有某一个U_λ时，称$\{U_\lambda\}$为A的基本邻域系（fundamental system of neighborhoods）。对任意集A，

$$\{V_r(A): r>0\}$$

一般未必形成A的基本邻域系。但由定义可看出：

$$\left\{B\left(a,\ \frac{1}{n}\right):\ n\text{为自然数}\right\}$$

形成a的基本邻域系。

由开集的性质c可推得：

有限个A的邻域的交是A的邻域。

定理1 集A是开集，当且仅当集A是它的每点的邻域。

证明 A是开集$\Longleftrightarrow$对任意$a\in A$，有$r_a>0$，使$B(a,r_a)\subset A\Longleftrightarrow A$是它的每点的邻域。

若集A是点x的邻域，则称点x为集A的**内点**（interior point），集A的所有内点集称为A的**内部**（interior），写做A°。下列关于内部的性质成立：

a．对于任意集A，A°是含在A中的最大开集。

实际上，若$x\in A^\circ$，则有含x的开集$U_x\subset A$，对每个$y\in U_x$，由定义A是y的邻域。因此$y\in A^\circ$，于是$U_x\subset A^\circ$，故A°是开集。若$B\subset A$是开集，由定义显然有$B\subset A^\circ$。

b．A是开集$\Longleftrightarrow A=A^\circ$。

c．若$A\subset B$，则$A^\circ\subset B^\circ$．

d．对任一对集A,B，有$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$．

由c有$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$，由a有$(A\cap B)^\circ$是含在$(A\cap B)$中的最大开集，而$A^\circ\cap B^\circ\subset A\cap B$为开集，故$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap E^\circ$．

集$E\setminus A$的内点称为A的外点(exterior point)，$E\setminus A$的内部即A的外点集称为A的外部(exterior)．

定理 2 点$x\in E$是A的外点，当且仅当$d(x,A)>0$．

证明 若$d(x,A)>0$，则$B(x,d(x,A))\subset E\setminus A$．故$x$是$E\setminus A$的内点．

反之，若x是A的外点，则有球$B(x,r)\subset E\setminus A$．对任意$y\in A$，有$d(x,y)>r$．因此$d(x,A)\geqslant r>0$．

在度量空间E中，开集的补集称为闭集(closed set)．

空集是闭集，全空间E也是闭集．

在实直线R上，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a]$是闭集，整数集Z也是闭集，而$[a,b)$及$(a,b]$是非开非闭集．

下列关于闭集的性质成立：

a．闭球是闭集，球面也是闭集．

如果$x\notin\overline{B}(a,r)$，则$d(a,x)>r$．若$y\in B(x,d(x,a)-r)$，则$d(x,y)<d(x,a)-r$，于是$d(y,a)\geqslant d(x,a)-d(x,y)>d(x,a)-d(x,a)+r=r$，即$y\notin\overline{B}(a,r)$，故$B(x,d(x,a)-r)\cap\overline{B}(a,r)=\phi$．即闭球的补集是开集，而闭球是闭集．

因球面

$$S(a,r)=\mathscr{C}[B(a,r)\cup\mathscr{C}\overline{B}(a,r)],$$

而$B(a,r)$及$\mathscr{C}\overline{B}(a,r)$都是开集，$S(a,r)$为开集的补集，故为闭集．

b．任意个闭集的交集是闭集．

c．有限个闭集的并集是闭集．

这两个性质由对偶原理直接推得．

设A为度量空间E的子集，点 $x\in E$，当 x 的任一邻域和 A 都有非空交时，称 x 为A的接触点(cluster point)。A的所有接触点集称为A的闭包(closure)，记作$\overline{A}$。

可见，x 不是A的接触点，意味着它是 $E\backslash A$的内点，即

$$x\in \mathscr{C}\overline{A}\Longleftrightarrow x\in(E\backslash A)^{\circ}.$$

故集A的闭包是A的外部的补集，即

$$\overline{A}=\mathscr{C}[\mathscr{C}A]^{\circ}.$$

由此可推得关于接触点和闭包有下列诸性质：

a．对于任意集 A，$\overline{A}$是含A的最小闭集。

实际上，因$[\mathscr{C}A]^{\circ}$是$\mathscr{C}A$ 内含的最大开集，取补得$\overline{A}$是含A的最小闭集。

b．A是闭集 $\Longleftrightarrow A=\overline{A}$.

实际上，A是闭集$\Longleftrightarrow\mathscr{C}A$是开集$\Longleftrightarrow\mathscr{C}A=(\mathscr{C}A)^{\circ}=\mathscr{C}\overline{A}$ $\Longleftrightarrow A=\overline{A}$.

c．若$A\subset B$，则$\overline{A}\subset\overline{B}$。

实际上，因$A\subset B$,故$\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$，$(\mathscr{C}A)^{\circ}\supset(\mathscr{C}B)^{\circ}$,即 $\overline{A}\subset\overline{B}$。

d．对任意A,B，有$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

实际上，$\mathscr{C}(\overline{A\cup B})=[\mathscr{C}(A\cup B)]^{\circ}=[\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B]^{\circ}=(\mathscr{C}A)^{\circ}\cap(\mathscr{C}B)^{\circ}=\mathscr{C}\overline{A}\cap\mathscr{C}\overline{B}=\mathscr{C}(\overline{A}\cup\overline{B})$，故 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

e．点 x 是A的接触点，当且仅当$d(x,A)=0$。

实际上，x是 A 的接触点$\Longleftrightarrow x$ 的任意邻域U 和A相交$\Longleftrightarrow d(x,A)=0$.

f．集A的闭包是A的一切形如$U_r(A)$的开邻域的交。

实际上，因对任意$r>0$，有$\overline{A}\subset U_r(A)$，故 $x\in\bigcap U_r(A)$ $\Longleftrightarrow d(x,A)=0\Longleftrightarrow x\in\overline{A}$。

g．任意闭集是开集的下降序列的交，任意开集是闭集的递增序列的并。

实际上，若A为闭集，则 $A=\overline{A}=\bigcap\limits_{r>0}U_r(A)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_{\frac{1}{n}}(A)$。

若A为开集，则$A=A^\circ$，$\mathscr{C}A^\circ=\overline{\mathscr{C}A}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_{\frac{1}{n}}(\mathscr{C}A)$， 故

八 $A^\circ=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}U_{\frac{1}{n}}(\mathscr{C}A)$。

h．若 A 的接触点x不属于A，则x的任意邻域V，必有$V\cap A$是无限集。

实际上，用反证法。令$V\cap A=\{y_1,\cdots,y_n\}$，由假设，$d(x,y_k)=r_k>0$。取 $r>0$，使$B(x,r)\subset V$，且$r<\min\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$，则$A\cap B(x,r)$必须是空集，矛盾。

点$x\in E$，如果x是A和$E\setminus A$两者的接触点，则称x为集 A 的边界点(frontier point)。A的所有边界点集$F_r(A)$称为 A 的边界(frontier)。它可以是空集。边界有下列诸性质：

a．$F_r(A)=\overline{A}\cap(\overline{E\setminus A})=F_r(E\setminus A)$。

因边界是二闭集的交，故边界必为闭集。

b．A的内部，A 的外部及A的边界三者互不相交，且其并为全空间E。即

$$E=A^\circ+(\mathscr{C}A)^\circ+F_r(A)。$$

设A为 E 的子集，若$a\in E$，a的任何邻域内均含有A的异于a的点，则称a为A的聚点(accumulation point)。A的聚点集称为A的导集（derived set），记作A^d。

A的点a若有邻域V，使 $V\cap A=\{a\}$，则称a为A的孤立点(isolated point)。

⑪ 显然，A的任一接触点不是A的聚点就是A的孤立点。

【习　　题】

29 1．在实直线上给出开集A,B的例子，使 $A\cap\overline{B}$，$B\cap\overline{A}$，$\overline{A\cap B}$以及$\overline{A}\cap\overline{B}$等四个集是各不相同的。

2．在实直线上给出两个区间A,B的例子，使 $A\cap\overline{B}$不含在$\overline{A\cap B}$中。

3．设 A 为度量空间E的开集，指出对E的任意子集B，有$A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$。

4．试证：$\overline{B(a,r)}\subset\overline{B}(a,r)$，但$\overline{B(a,r)}=\overline{B}(a,r)$却未必成立。

5．试证：$(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$。

6．试证任意集合A的导集必是闭集。

7．在R^2上，令 $M=\{(x,y)$：当 $x\neq 0$时，$y=\sin\frac{1}{x}$，当$x=0$时，$y=0\}$，求出M^d及M°。

8．证明$[0,1]$中无理数的全体不可能表示为可列个闭集的并集。

9．用十进小数表示闭区间$[0,1]$中的数时，用不着数字7的一切数构成的集设为A，则$A=A^d$。

10．$A=A^d$的集称为完全集（complete set）。试证将点集$[0,1]$可表示为$\mathfrak{C}$个无共同点的完全集的并集。

11．令$\alpha(A)=(\overline{A})^\circ$，$\beta(A)=\overline{A^\circ}$。

a．指出：若A为开集，则$A\subset\alpha(A)$；

若A为闭集，则$A\supset\beta(A)$。

b．指出：对E的每个子集A，必有

$\alpha(\alpha(A))=\alpha(A)$，且$\beta(\beta(A))=\beta(A)$。

c．在实直线上给出一个集A的例子，使得$A,A^\circ,\overline{A}$，$\alpha(A),\beta(A),\alpha(A^\circ),\beta(\overline{A})$各不相同。而且除下列关系外，没有其它关系：

$$A^\circ\subset A\subset\overline{A},\quad A^\circ\subset\alpha(A^\circ)\subset\beta(A)\subset\overline{A},$$

$$A^\circ\subset\alpha(A)\subset\beta(\overline{A})\subset\overline{A}.$$

12．试证：$F_r(\overline{A})\subset F_r(A)$；$F_r(A^\circ)\subset F_r(A)$。在实直线上给出一个例子指出这三个集是互不相同的。

13. 试证：$F_r(A\cup B)\subset F_r(A)\cup F_r(B)$. 在实直线上给出一个它们是不相同的例子. 若$\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$，则 $F_r(A\cup B)=F_r(A)\cup F_r(B)$.

14. 设A和B是开集，试证

$$[(A\cap F_r(B))\cup(B\cap F_r(A))]\subset F_r(A\cap B)\subset$$
$$[(A\cap F_r(B))\cup(B\cap F_r(A))\cup(F_r(A)\cap F_r(B))].$$

在实直线上给出一个这三个集是各不相同的例子.

15. 设d为E上的距离，满足超度量不等式（ultrametric inequality）

$$d(x,z)\leqslant\max(d(x,y),d(y,z)).$$

其中$x,y,z\in E$.

a. 指出：若$d(x,y)\neq d(y,z)$，则$d(x,z)=\max(d(x,y),d(y,z))$.

b. 指出：任意开球$B(x,r)$是开且闭集，并且对于任意$y\in B(x,r)$，有$B(y,r)=B(x,r)$.

c. 指出：任意闭球$\overline{B}(x,r)$是开且闭集，并且对于任意$y\in\overline{B}(x,r)$，有$\overline{B}(y,r)=\overline{B}(x,r)$.

d. 若E的两个球有共同点，则其中之一必含在另一个之中.

e. 含在半径为r的闭球中的半径为r的两个不同开球的距离等于r.

16. 试证：离散空间的子集都是开集，也都是闭集.

17. 试证：A是闭集，当且仅当$A^d\subset A$.

§4 度量空间的收敛性
(convergence of metric space)

设(a_n)为度量空间E的序列，若有$a_0\in E$，对于a_0的任一邻域U，恒有N_0，当$n\geqslant N_0$时，$a_n\in U$，则称a_0为序列(a_n)的

极限点（limit point）或 (a_n) 收敛(convergence)于 a_0，记作

$$a_n \to a_0.$$

定理 1 (a_n)收敛于 a_0 的充要条件是 $d(a_n, a_0) \to 0$.

证明 若$a_n \to a_0$,则对于任一$\varepsilon > 0$，对应$B(a_0, \varepsilon)$，有 N_ε，当 $n \geqslant N_\varepsilon$时，$a_n \in B(a_0, \varepsilon)$。故 $d(a_n, a_0) < \varepsilon$,即 $d(a_n, a_0) \to 0$.

反之，若 $d(a_n, a_0) \to 0$，对于a_0 的任一邻域U，必有$B(a_0, \varepsilon) \subset U$，对应 ε 有N_0。当 $n \geqslant N_0$时，$d(a_n, a_0) < \varepsilon$。于是$a_n \in B(a_0, \varepsilon)$。由定义有$a_n \to a_0$.

定理 2 任一序列不能有两个不同的极限点.

证明 若 $a_n \to a$ 且$a_n \to b$，$a \neq b$，设 $d(a,b) = r$，对应$B(a, \frac{r}{2})$有N_1，当 $n \geqslant N_1$时，$a_n \in B(a, \frac{r}{2})$。对应$B(b, \frac{r}{2})$，有$N_2$，当 $n \geqslant N_2$ 时，$a_n \in B(b, \frac{r}{2})$.当 $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ 时，$a_n \in B(a, \frac{r}{2}) \cap B(b, \frac{r}{2})$。由三点不等式知$B(a, \frac{r}{2}) \cap B(b, \frac{r}{2}) = \phi$。矛盾。

由定义直接可看出：若 $a_n \to a_0$，则(a_n)的任一子列也收敛于a_0。

定理 3 下列诸条件等价：

a．a_0是集A的接触点；

b．集A中有收敛于a_0的序列；

c．$d(a_0, A) = 0$.

证明 a $\Rightarrow$ b．由定义，对任一 n，有 $a_n \in A \cap B(a_0, \frac{1}{n})$，则$(a_n)$是$A$中收敛于$a_0$的序列。

b $\Rightarrow$ c．若 $a_n \to a_0$，则由定理 1，$d(a_n, a_0) \to 0$. $d(a_0, A) \leqslant \inf\limits_n d(a_n, a_0) = 0$，故 $d(a_0, A) = 0$.

c $\Rightarrow$ a．这是接触点的性质 e 的结果。

定理 4 a_0是点集A的聚点，当且仅当A中有异于 a_0 而收敛于a_0的序列。

证明 若$a_0 \in A^d$，则对任意n，在$N(a_0,\frac{1}{n})$中必有A的点$a_n \neq a_0$，序列(a_n)是异于a_0而收敛于a_0的序列。

反之，若A有异于a_0而收敛于a_0的序列，则a_0的任一邻域U，必有N_0，当$n \geqslant N_0$时，$a_n \in U$。即a_0的任何邻域内皆有A的异于a_0的点，故a_0是A的聚点。

设(a_n)为度量空间E的序列，若(a_n)有子列收敛于$a_0 \in E$，则称a_0为序列(a_n)的接触点(cluster point)。

由定义直接看出，(a_n)的任一子列的接触点也是(a_n)的接触点；若(a_n)是收敛序列(convergent sequence)，则它的极限点是其唯一的接触点。反之，有唯一接触点的序列却未必收敛。

以度量空间$C[a,b]$（§1，例8）及s（§1，例5）为例，观察一下收敛的意义。

$C[a,b]$中$a_n \to a_0$，当且仅当函数列$(a_n(t))$一致收敛于$a_0(t)$。

实际上，若(a_n)在$C[a,b]$中收敛于a_0，则对任一$\varepsilon>0$，有N_0，当$n \geqslant N_0$时，$d(a_n,a_0)=\max|a_n(t)-a_0(t)|<\varepsilon$。即对任一$t \in [a,b]$，必有$|a_n(t)-a_0(t)|<\varepsilon$。即$(a_n(t))$一致收敛于$a_0(t)$。

反之，若$(a_n(t))$一致收敛于$a_0(t)$，即对任一$\varepsilon>0$，有N_0。当$n \geqslant N_0$时，$|a_n(t)-a_0(t)|<\varepsilon$。故$d(a_n,a_0)=\max|a_n(t)-a_0(t)|<\varepsilon$。

s中$a_n \to a_0$，当且仅当序列依坐标收敛。

当$d(a_n,a_0)\to 0$时，即对任一$\varepsilon>0$，有N_0，当$n \geqslant N_0$时，$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}{1+|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}<\varepsilon$，从而当$n \geqslant N_0$时，对每个固定的$i$，当然也有$\frac{1}{2^i}\frac{|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}{1+|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}<\varepsilon$。因$\varepsilon$是任意的，而$i$是固定的，所以当$n\to\infty$时，$|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|\to 0$，即$a_i^{(n)}\to a_i^{(0)}$。

反之，若$a_i^{(n)}\to a_i^{(0)}(i=1,2,\cdots)$，则对任一$\varepsilon>0$，有$m$，使

$\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$. 故 $d(a_n,a_0)<\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}{1+|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}+\frac{\varepsilon}{2}$. 当 n 相当大时，可使 $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}{1+|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|}<\frac{\varepsilon}{2}$. 故 $d(a_n,a_0)<\varepsilon$.

【习　　题】

1．举例指出一个序列可以有无限多接触点，也可以没有接触点。

2．设 (x_n) 是度量空间 E 的序列，指出：若有三个子序列 (x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{3n}) 是收敛的，则 (x_n) 是收敛序列。

3．试证实数有界序列必有接触点。

4．任意改变收敛序列的顺序，依旧是收敛序列，且极限点不变。

5．序列 (a_n) 的任一子列有一个收敛于 b 的子列，则 $a_n\to b$。

6．给出一个不收敛的实数序列 (x_n) 的例子，它对于任意 $k\geqslant 2$，子列 (x_{kn}) 是收敛的。

§5　连续映射
(continuous mapping)

设 (E_1,d_1), (E_2,d_2) 是两个度量空间，$f: E_1\to E_2$. 如果对于 $f(a_0)$ 的任一邻域 V（在 E_2 中），存在 a_0 的某一邻域 U（在 E_1 中），使 $f(U)\subset V$ 时，称 f 在 a_0 点连续（continuous at a point a_0）。如果 f 在 E_1 的每一点上都连续，则称 f 在 E_1 上连续（continuous）。

定理 1　设 $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$，下列四条件是等价的：

a．f 在 a_0 点连续；

b．对任一$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，当$d_1(x,a_0)<\delta$时，恒有$d_2(f(x), f(a_0))<\varepsilon$；

c．对收敛于 a_0的任一序列 (a_n)，恒有 $(f(a_n))$ 收敛于$f(a_0)$；

d．对$f(a_0)$的任一邻域V，$f^{-1}(V)$是a_0的邻域．

证明 a ⇒ b 对于任意$\varepsilon>0$，由条件 a，存在a_0的邻域U，使$f(U)\subset B(f(a_0),\varepsilon)$．因$a_0$是$U$的内点，故有$\delta>0$，使$B(a_0,\delta)\subset U$．故$f(B(a_0,\delta))\subset B(f(a_0),\varepsilon)$．即当$d_1(x,a_0)<\delta$时，恒有$d_2(f(x),f(a_0))<\varepsilon$．

b ⇒ c 由条件 b，对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，满足 b．因$a_n\to a_0$，对应δ有n_0，当$n\geqslant n_0$时，$d_1(a_n,a_0)<\delta$．这时由条件 b，$d_2(f(a_n),f(a_0))<\varepsilon$．故$f(a_n)\to f(a_0)$．

c ⇒ d 否则，$f(a_0)$有邻域V，$f^{-1}(V)$不是 a_0 的邻域．即在$B(a_0,\frac{1}{n})$中必有 $a_n\notin f^{-1}(V)$．得到序列 (a_n)收敛于 a_0．由条件 c，$f(a_n)\to f(a_0)$．但 $f(a_n)\notin V$，矛盾．

d ⇒ a 对应$f(a_0)$的邻域V，取U为$f^{-1}(V)$即可．

定理 2 若$a_0\in E$是集$A\subset E$的接触点，且f在点a_0连续，则$f(a_0)$是$f(A)$的接触点．

证明 若V是$f(a_0)$的邻域，则$f^{-1}(V)$是a_0的邻域，因此有$y\in A\cap f^{-1}(V)$，故有$f(y)\in f(A)\cap V$．

定理 3 设 $f: E_1\to E_2$，下列性质是等价的：

a．f是连续的；

b．对于E_2的任一开集B，$f^{-1}(B)$是E_1中开集；

c．对于E_2的任一闭集B，$f^{-1}(B)$是E_1中闭集；

d．对于E_1中任一集A，$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$．

证明 a ⇒ d 由定理 2 立即得知．

d ⇒ c 因若B是闭集且$A=f^{-1}(B)$，则$f(\overline{A})\subset\overline{B}=B$．因此$\overline{A}\subset f^{-1}(B)=A$，而$A\subset\overline{A}$．故$A$为闭集．

c ⇒b 由闭集的定义及关系式$f^{-1}(E_2\setminus B)=f^{-1}(E_2)\setminus f^{-1}(B)$推得。

b ⇒ a　若V是$f(a_0)$的邻域，则有$f(a_0)$的开邻域$W\subset V$，$f^{-1}(W)$是含a_0的开集且包含在$f^{-1}(V)$中。因此由定理1知f在每一点a_0是连续的。

必须注意，在连续映射下开（闭）集的象未必是开（闭）集。例如，$x\to x^2$在R上是连续的，但开集$(-1,1)$的象是$[0,1)$不是开集。$x\to 1/x$在实数集$E=[1,\infty)$上是连续的，但闭集E的象是区间$(0,1]$，在R中不是闭集。

定理 4　设$f: E_1\to E_2$，$g: E_2\to E_3$，若f在a_0点连续，g在$f(a_0)$点连续，则$h=g\circ f$在a_0点连续。若f在E_1上连续，g在E_2上连续，则h在E_1上也是连续的。

证明　设W是$h(a_0)$的邻域，则由定理1知$g^{-1}(W)$是$f(a_0)$的邻域，而$f^{-1}[g^{-1}(W)]$是a_0的邻域。但$f^{-1}[g^{-1}(W)]=h^{-1}(W)$，故$h$在$a_0$点是连续的。

由此直接推得第二部分的证明。

设E是度量空间，A是E的子集，点a是A的接触点，$a\notin A$，f是A到度量空间(E_1,d_1)的映射。如果对任意$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，当$x\in A$，$d(x,a)<\delta$时，恒有$d_1(a',f(x))<\varepsilon$，则称当$x\in A$趋向于a时，即$d(x,a)\to 0$时，$f(x)$的极限(limit)是$a'\in E_1$。写作$a'=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}}f(x)$。显然，如果$a\in A$，且$a'=f(a)$，这个语言和记号表示$f(x)$在$a$点连续。

$a'\in E_1$是$f(x)$当$x(\in A)$趋向于a时的极限，当且仅当对于a'在E_1中的每个邻域V'有a在E中的邻域V，使$f(V\cap A)\subset V'$。

这个等价定义是显然的，而且我们也可以用极限的语言刻画连续性。设f是E到E_1的映射，$a\in E$且a是$E-\{a\}$的接触点，则有：

f 在 a 点连续，当且仅当 $f(a)=\lim\limits_{\substack{x\in E\setminus(a)\\x\to a}} f(x)$。

定理 5 设 f 是 $A\subset(E,d)$ 到 (E_1,d_1) 的映射，且 $a\in\overline{A}$。f 关于 A 在 a 点有极限 $a'\in E_1$，当且仅当对于 A 的每个收敛于 a 的序列 (a_n)，有 $a'=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$。

证明 必要性：当 $x\to a$ 时，有 $a'=\lim\limits_{\substack{x\in A\\x\to a}} f(x)$。即对任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $d(x,a)<\delta$ 时，有 $d_1(a',f(x))<\varepsilon$。今 (a_n) 收敛于 a，即对应 $\delta>0$，有 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $d(a_n,a)<\delta$。于是，对应 $\varepsilon>0$，有 $N(\delta)$，当 $n\geqslant N(\delta)$ 时，有 $d_1(a',f(a_n))<\varepsilon$。即 $a'=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$。

充分性：假设相反，对于每个 A 的收敛于 a 的序列 (a_n)，都有 $a'=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$，而 a' 不是 f 关于 A 在 a 点的极限，则存在 $\alpha>0$，对任一正整数 n，存在 $a_n\in A$，使 $d(a,a_n)<\dfrac{1}{n}$ 而 $d_1(a',f(a_n))\geqslant\alpha$。如此做的序列 (a_n) 是收敛于 a 的，但 $a'\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$。矛盾。

设 $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$，对任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $d_1(x,y)<\delta$，恒有 $d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$ 时，称 f 为 E_1 到 E_2 的**一致连续映射**(uniformly continuous mapping)。

由定义及定理 1 立即得出：一致连续映射是连续的。

一般的，其逆不成立。例如，函数 $x\to x^2$ 在 R 上不是一致连续的。因对已给 $a>0$，差 $(x+a)^2-x^2=a(2x+a)$ 可取得任意大的值。

常值映射及自然映射都是一致连续的例子。R 到 R 的映射 $x\to ax$ 及 $R\times R$ 到 R 的映射 $(x,y)\to x+y$ 都是一致连续的。

设 $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$。若 f 是双射且 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 f 为**同胚映射**(homeomorphism mapping)，或**双连续映射**(bicontinuous mapping)。于是逆映射是 E_2 到 E_1 的同胚映射。若 f 是 E_1 到 E_2 上的同胚映射，g 是 E_2 到 E_3 上的同胚映射，则 $g\circ f$ 是

E_1到E_3上的同胚映射．同胚映射可以不是一致连续的．例如R到R的同胚映射$x\to x^3$不是一致连续的．如果二度量空间E_1与E_2之间存在同胚映射，则称它们是同胚(homeomorphism)的．

设$f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$是双射，对E_1的任意元素对x,y，恒有$d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y))$时，称f为E_1到E_2上的等距映射(isometric mapping)，而有等距映射的空间E_1和E_2称为等距空间(isometric space)。

由距离产生的一切性质对于等距空间来说是没有区别的。

等距关系是同胚关系．同胚关系是等价关系，但未必是等距关系。

例　实直线R和开区间$(-1,1)$在通常距离下都是度量空间．令$f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$，则f是R到I上的双射，$f^{-1}(y)=\dfrac{y}{1-|y|}$．$f$及$f^{-1}$都是连续映射，故$R$与$I$同胚．但$f$不是等距映射，且$R$与$I$间不存在等距映射。

在§1习题1中我们已经看到，在同一个集合上可确定不同的距离，使之成为度量空间．设d_1,d_2为集E上的两个距离，确定(E,d_1)，(E,d_2)为两个度量空间．若(E,d_1)到(E,d_2)上的恒等映射$x\to x$是同胚的，则d_1,d_2称为**等价距离**(equivalent distance)或**拓扑等价距离**(*topologically equivalent distance*)。这时(E,d_1)与(E,d_2)具有相同的开集族．度量空间E的开集族通常称为E的**拓扑**(topology)，故等价距离给与相同的拓扑。

§1习题1中给出的三个距离是等价距离。

在同胚映射下保持不变的性质称为**拓扑性质**(property of topology)，容易证明，开集、内点、内部、邻域、开邻域、基本邻域系、外部、外点、闭集、接触点、闭包、边界、边界点、聚点、导集、孤立点、连续映射等都是拓扑性质，而开

球、闭球、球面、直径、有界集、一致连续映射等都不是拓扑性质.

【习　　题】

1. 试证$R\times R$到R的映射$(x,y)\to xy$是连续的.

2. 试证R到R的映射$x\to\frac{1}{x}$在$x\neq 0$的点是连续的.

3. 试证$R\times R$到R的映射$(x,y)\to\sup\{x,y\}$及$(x,y)\to\inf\{x,y\}$是一致连续的.

4. 实数集R同胚于任意开区间.

5. 对于度量空间E的任一非空子集A，$x\to d(x,A)$是一致连续的;

6. 设$f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$，指出下列性质是等价的:

a. f是连续的;

b. 对于E_2的每个子集A，有$f^{-1}(A^\circ)\subset(f^{-1}(A))^\circ$;

c. 对于E_2的每个子集A，有$\overline{f^{-1}(A)}\subset f^{-1}(\overline{A})$.

7. 举例指出存在连续映射f及子集$A\subset E_2$,使$f^{-1}(\overline{A})$不是$f^{-1}(A)$的闭包.

8. 若$a_1=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}}f(x)$且$b_1=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\subset A}}f(x)$，则$a_1=b_1$.

9. 设f是度量空间E_1到E_2的一致连续映射，g是E_2到E_3的一致连续映射，则$h=g\circ f$是E_1到E_3的一致连续映射.

10. 对于任意度量空间E，任意实数$r>0$，及任意子集$A\subset E$，集$V_r(A)=\{x: x\in E, d(x,A)\leqslant r\}$是闭集.

11. E上的距离d是$E\times E$到R的二元连续函数，即当$x_n\to x_0, y_n\to y_0$时，有$d(x_n,y_n)\to d(x_0,y_0)$.

12. 设A，B为度量空间E的二非空子集，满足$A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\phi$,试证存在开集$U\supset A$及开集$V\supset B$,使$U\cap V=\phi$.

13. 有界闭集上的连续函数是一致连续的.

14．试讨论Riemann函数：当 $x\in(0,1)$ 且为有理数 $\frac{p}{q}$，$(p,q)=1$时，$f(x)=\frac{1}{q}$；当 x 为无理数时，$f(x)=0$，在$(0,1)$上的连续性。

15．若$b=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in A}}f(x)$，则 $b\in\overline{f(A)}$。

16．设 a 为 E 中序列(x_n)的接触点，f 为 E 到E'的映射。若 f 在 a 点连续，则$f(a)$是序列$(f(x_n))$的接触点。

17．设 f 是度量空间 E 到度量空间 F 上的连续映射，$\{V_\lambda:\lambda\in L\}$是 F 的开覆盖，若对每个 $\lambda\in L$，f 在$f^{-1}(V_\lambda)$上的限制是 $f^{-1}(V_\lambda)$到V_λ的同胚映射，则 f 是 E 到 F 上的同胚映射。

18．设 E、F、G为三个度量空间，f 是 E 到 F 的连续映射，g 是 F 到 G 的连续映射。试证如果 f 是满射，$g\circ f$ 是 E 到 G 上的同胚映射，则 f 是 E 到 F 上的同胚映射，且 g 是 F 到 G 上的同胚映射。

19．若A，B为 E 的子集且 $B\subset A$，$a\in B^d$，则 $f:A\to E_1$关于A在 a 点的极限也是 f 关于 B 在 a 点的极限。

20．设 f，g 分别为度量空间(E,d)到R的映射，$x_0\in E$。若 f 在 x_0点连续而 g 在 x_0 点不连续，则 $f\times g$ 在 x_0 点是否必不连续？ $f+g$ 如何？

21．证明在$[0,1]$上不可能定义一个函数，它在每一个有理点连续，而在每一个无理点不连续。

22．$[a,b]$上定义的函数$f(x)$，如果对于任意实数 c

$$\{x:f(x)\geqslant c\},\{x:f(x)\leqslant c\}$$

恒为闭集，则$f(x)$是连续函数。

23．设 d_1,d_2 都是集 E 上定义的距离函数，则下述诸条件等价：

a．d_1和d_2是等价距离；

b．对于E的任一点 x 及正实数 ε，存在正实数 δ，

使得任意 $y \in E$

若 $d_1(x,y)<\delta$，则 $d_2(x,y)<\varepsilon$；

且若 $d_2(x,y)<\delta$，则 $d_1(x,y)<\varepsilon$。

c．对于 E 的点列 $\{x_n\}$ 及 E 的点 x，

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,x)=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_2(x_n,x)=0.$$

24．在 E 中，对于任意距离函数 d，确定

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad x,y \in E$$

则 d' 是 E 上距离函数。关于 d'，E 是有界的，而且 d 和 d' 是等价距离。

第二章　各种度量空间

(various metric space)

§1　可分空间与子空间

(separable space and subspace)

设A、B是度量空间E的子集．若B的任一点都是A的接触点，即$B\subset\overline{A}$时，称A关于B稠密(dense)．特别地，当$B=E$时，称A在E中稠密．

定理1　下列各条件等价：

a．A在E中稠密；

b．E中任一非空开集U，$U\cap A\neq\phi$；

c．对于任一点$x\in E$及$\varepsilon>0$，在A中有a，使$d(a,x)<\varepsilon$；

d．对于任一点$x\in E$，A中必有序列(x_n)，使$x_n\to x$．

证明：a⇒b　若有非空开集U，使$U\cap A=\phi$，则$U\cap\overline{A}=\phi$，与$E\subset\overline{A}$矛盾．

b⇒c　对任意$\varepsilon>0$，必有$B(x,\varepsilon)\cap A\neq\phi$．故有$a\in B(x,\varepsilon)\cap A$，即$A$有元素$a$，使$d(a,x)<\varepsilon$．

c⇒d　因对任意n必有$x_n\in A$，使$d(x,x_n)<\frac{1}{n}$．故A中必有序列(x_n)使$x_n\to x$．

d⇒a　根据第一章§4定理3，E的任意元素都是A的接触点，即$E\subset\overline{A}$．

稠密性在分析学中是很有用的．当考察度量空间E是否具有某种性质时，先在它的某个稠密子集上进行考察，然后通过

极限过程，可得出在E上相应的结论。

定理 2 设A、B、C是度量空间E的子集．若A关于B稠密，B关于C稠密，则A关于C稠密。

证明 由定义，$\overline{A}\supset B$，$\overline{B}\supset C$，故$\overline{A}\supset\overline{B}\supset C$，即$A$关于$C$稠密。

若度量空间E中有至多可列集A在E中稠密，则称E为可分空间(separable space)。

例 1 n维Euclid空间是可分空间。

实际上，坐标为有理数的点集是其中的可列稠子集。

例 2 有界序列集m中，规定$d(x,y)=\sup|x_i-y_i|$，m是度量空间，但不是可分空间。

实际上，设A为坐标由0，1作成的序列的集，则A是不可列集．A中任二点的距离是1．若m是可分空间，则有至多可列集A_0在m中稠密．则$\{B(a,\frac{1}{3}):a\in A_0\}$必做成$m$的覆盖。

否则，若有$x\in m$，而对任何 $a\in A_0$，$x\notin B(a,\frac{1}{3})$，则$B(x,\frac{1}{3})\cap A_0=\phi$，与$A_0$的稠密性矛盾。

故A的每点必在某个 $B(a,\frac{1}{3})$中 $(a\in A_0)$，因A不可列，而A_0可列，故必有$x,y\in A$在同一球$B(a,\frac{1}{3})$中。

$$1=d(x,y)\leqslant d(x,a)+d(y,a)<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

矛盾。

非空开集族$\{G_\lambda:\lambda\in L\}$称为度量空间$E$的开集基或基(basis)，当且仅当$E$的每个非空开集都是族$\{G_\lambda:\lambda\in L\}$的子族的并。

定理 3 族$\{G_\lambda:\lambda\in L\}$是基，当且仅当对每个$x\in E$及$x$

的每个邻域V，存在 $\lambda \in L$，使 $x \in G_\lambda \subset V$.

证明 必要性．由定义有x的开邻域$W \subset V$，且W是集G_λ的并，故必有 $\mu \in L$，使 $x \in G_\mu \subset V$.

充分性．如果条件成立，U是任意开集，对每个$x \in U$，有$\mu(x) \in L$，使$x \in G_{\mu(x)} \subset U$，因此$U \subset \bigcup_{x \in U} G_{\mu(x)} \subset U$.

定理 4 度量空间E是可分的，当且仅当存在E的至多可数的开集基．

证明 充分性．若$\{G_n\}$是开集基，a_n 是G_n 的点．则任意非空开集是某些G_n的并．因之它和至多可数集 $\{a_n\}$的交是非空的．

反之，假设存在E的可数子集$\{a_n\}$在E中稠密，则开球族$\{B(a_n, \frac{1}{m})\}$是E的可数开集基．

实际上，对每个 $x \in E$ 和每个$r>0$，有$m \in N$，使$\frac{1}{m}<\frac{r}{2}$，有$n \in N$，使$a_n \in B(x, \frac{1}{m})$．这意味着$x \in B(a_n, \frac{1}{m})$．另一方面，若$y \in B(a_n, \frac{1}{m})$，则 $d(x,y) \leqslant d(x,a_n)+d(a_n,y) \leqslant \frac{2}{m}<r$，于是 $B(a_n, \frac{1}{m}) \subset B(x,r)$．由定理 3 得证．

设A是度量空间E的非空子集，映射 $(x,y) \to d(x,y)$ 限制在 $A \times A$上．显然是A上的距离，称之为E上的距离在A上的诱导(induced)．由诱导距离定义的度量空间称之为度量空间E的子空间(subspace)．

定理 5 集$A \subset F$是子空间F的开集，当且仅当在E中存在开集G，使 $A=G \cap F$.

证明：若 $a \in F$，则 $F \cap B(a,r)$是F中开球．若E中有开集G，使$A=G \cap F$，$x \in A$，则有$r>0$，使 $B(x,r) \subset G$，故

$x \in F \cap B(x,r) \subset G \cap F = A$. 这指出$A$是$F$中开集.反之，若$A$在子空间$F$中是开集，对每个$x \in A$，有$r(x)>0$,使$F \cap B(x,r(x)) \subset A$.这指出$A = \bigcup_{x \in A}(F \cap B(x,r(x))) = F \cap G$,其中$G = \bigcup_{x \in A} B(x,r(x))$,且在$E$中是开集.

推论1 F中任一开子集在E中是开集，当且仅当F在E中是开集.

推论2 $x \in F$，F的子集W在F中是x的邻域，当且仅当$W = V \cap F$，其中V是x在E中的邻域.

推论3 点$x \in F$在F中任意邻域是E中x的邻域，当且仅当F是x在E中的邻域.

推论4 集$B \subset F$在子空间F中是闭集，当且仅当存在E中闭集A，使$B = A \cap F$.

推论5 F中任一闭子集在E中是闭集，当且仅当F在E中是闭集.

定理6 设F为E的稠子集. 对每一点$x \in F$及x在F中的每个邻域W，W在E中的闭包$\overline{W}$是x在E中的邻域.

证明 由定义，在E中有x的开邻域U,使$U \cap F \subset W$.只需证明$U \subset \overline{W}$. 若$y \in U$且V是y在E中的任一邻域，则$U \cap V$是y在E中的邻域. 因$F \cap (U \cap V)$是非空的,故$(F \cap U) \cap V$不空，即$y \in \overline{F \cap U} \subset \overline{W}$. 故$U \subset \overline{W}$.

【习　　题】

1. E的开子集与其外部的并集在E中稠密.

2. 可分度量空间E中所有孤立点的子集是至多可数的.

3. 可分度量空间中两两不相交的开集族$\{U_\lambda: \lambda \in L\}$是至多可数的.

4. 设A为实直线的非空子集，B是$x\in\overline{A}$且有区间$(x, y)\cap A=\phi$的x的集合，则B是至多可数集。

5. 可分度量空间的每个开覆盖中可选出可数开覆盖。

6. F的子集B关于F的闭包等于$\overline{B}\cap F$。其中$\overline{B}$为B在E中的闭包。

7. 可分度量空间的任意子空间是可分的。

8. 设A，B是度量空间E的二非空子集，C是$A\cap B$的子集。若C关于A及关于B都是开集，则C关于$A\cup B$也是开集。

9. 在平面R^2上给出一个子空间E的例子，在E中有一个开球是闭集，但不是闭球；一个闭球是开集，但不是开球。

10. 设$\{U_\alpha\}$是度量空间E的由开集组成的覆盖。E的子集A在E中是闭集，当且仅当每个集$A\cap U_\alpha$关于U_α是闭集。

11. 度量空间E中子集A称为局部闭(locally closed)的，如果对于每个$x\in A$，存在x的邻域V，使$A\cap V$关于V是闭的。指出E的局部闭子集必为E中开集U与E中闭集F的交$U\cap F$。

12. 设E为可分度量空间，E的子集A的凝聚点(condensation point) x是指x的任一邻域内有A的不可数点集，试证

a．若A无凝聚点，则A是至多可数集。

b．若B是集A的凝聚点集，则B的每个点是B的凝聚点，并且$A\cap(\mathscr{C}B)$至多是可数集。

13. 设E为可分度量空间，f是E到R的任意映射。如果x_0存在邻域V，对于任意点$x\in V$，恒有$f(x)\leqslant f(x_0)$（或$f(x)<f(x_0)$），则称f在x_0点到达相关极大(relative maximum)或严格相关极大(strict relative maximum)。试证f到达严格相关极大的点$x\in E$的集合M是至多可数的。

14. 试证可分空间的连续象是可分空间。

§ 2 完备空间

(complete spaces)

设(x_n)为度量空间E的序列.若对于任一$\varepsilon>0$，有N_0,当$n,m\geqslant N_0$时,恒有$d(x_n,x_m)<\varepsilon$,则称(x_n)为**基本列**(fundamental sequence)或**Cauchy 序列**.

基本列也可以叙述为如下的等价形式:

设(x_n)为度量空间E的序列，若对于任一$\varepsilon>0$,有N_0，当$n>N_0$时，恒有$d(x_n,x_{N_0})<\varepsilon$.

由定义可推得:

a．收敛列必为基本列.

实际上，若(x_n)为收敛列,则有x_0使$x_n\to x_0$. 即对于任一$\varepsilon>0$,有N_0. 当$n\geqslant N_0$时,有$d(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$.于是当$n,m\geqslant N_0$时，$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_m,x_0)<\varepsilon$.

b．基本列未必是收敛列.

如$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$在有理数空间中是基本列但不是收敛列.

c．基本列的点做成的集是有界集.

设(x_n)为基本列,则对应1，有N_0,当$m,n\geqslant N_0$时，$d(x_n,x_m)\leqslant 1$．令

$$r_0=\max\{d(x_1,x_{N_0}),d(x_2,x_{N_0}),\cdots,d(x_{N_0-1},x_{N_0}),1\},$$

则对于任一n，恒有$x_n\in B(x_{N_0},r_0)$,故(x_n)是有界集.

d．基本列的接触点必为极限点.

设x_0为基本列(x_n)的接触点,则(x_n)有子列(x_{n_k})收敛于x_0. 即对任一$\varepsilon>0$，有N_1,当$n_k\geqslant N_1$时，$d(x_{n_k},x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$,因$(x_n)$是基本列,故有$N_2$.当$n,m\geqslant N_2$时,有$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$.令$N_0=\max\{N_1,N_2\}$,当$n\geqslant N_0$时,取$n_k>N_0$,则$d(x_n,x_0)\leqslant d(x_n,$

$x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，故$(x_n)$为收敛列，而$x_0$为$(x_n)$的极限点。

若度量空间E的任一基本列都有极限，则称E为完备空间(complete space)。

由Cauchy收敛准则知实数集按通常距离是完备空间。

例1　n维Euclid空间是完备的。

实际上，设(x^m)是任一基本列，其中$x^m = (x_1^m, x_2^m, \cdots x_n^m)$，因

$$|x_i^m - x_i^k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^m - x_i^k)^2} = d(x^m, x^k),$$

而(x^m)是基本列，故(x_i^m)也是基本列。由实数空间的完备性，有x_i^0，使$x_i^m \to x_i^0$，故$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in R^n$，且

$$d(x^m, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i^m - x_i^0|^2} \longrightarrow 0.$$

即(x^m)在R^n中收敛于x^0，故R^n为完备空间。

例2　$C[a,b]$是完备空间。

设(f_n)是$C[a,b]$的任一基本列，即对于任一$\varepsilon > 0$，有N_0，当$n, m \geqslant N_0$时，$d(f_n, f_m) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$。即对于任一$x \in [a,b]$，必有$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$。故对于任一$x \in [a, b]$，$(f_n(x))$是收敛列。设其极限为$f(x)$。则$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$。由数学分析知连续函数列一致收敛的极限必为连续函数，故$f \in C[a,b]$。

定理1　(Cantor闭球套定理) 设$\{\overline{B}(a_n, r_n)\}$为完备空间$E$中一列闭球，满足$\overline{B}(a_n, r_n) \subset \overline{B}(a_{n-1}, r_{n-1})$，且$r_n \to 0$，则有且仅有一点$a$，使$a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}(a_n, r_n)$。

证明　观察序列(a_n)，由条件，当$n \geqslant m$时，$a_n \in \overline{B}(a_m, r_m)$。故$d(a_n, a_m) \leqslant r_m$。因$r_n \to 0$，对任一$\varepsilon > 0$，有$N_0$，当$n \geqslant N_0$

时，$r_n<\varepsilon$，于是当 $n,m\geqslant N_0$ 时，$d(a_n,a_m)\leqslant r_{\min(n,m)}\leqslant r_{N_0}<\varepsilon$．故$(a_n)$为基本列．因$E$为完备空间，故$(a_n)$有极限$a$．对每个$m$，当 $n\geqslant m$时，a_n必在$\overline{B}(a_m,r_m)$中．因$\overline{B}(a_m,r_m)$为闭集，而$\{a_n,n\geqslant m\}$收敛于a，故$a\in\overline{B}(a_m,r_m)$，即$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}(a_n,r_n)$。

若$a,b\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{B}(a_m,r_m)$，$a\neq b$，则 $d(a,b)>0$，因$d(a,b)\leqslant d(a,a_n)+d(a_n,b)\to 0$，矛盾．

值得注意的是非空有界闭集的下降序列，其交集却可能是空集．

例 3 在实数集R中规定距离为

$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

设$F_n=[n,+\infty)$，$n=1,2,\cdots$．于是，各F_n是有界闭集，而$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\phi$．

例 4 在自然数集N中，规定距离为

$$d(m,n)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{m+n} & 如\ m\neq n,\\ 0 & 如\ m=n.\end{cases}$$

设 $B_n=\{m:d(m,n)\leqslant 1+\dfrac{1}{2n}\}=\{n,n+1,\cdots\}$。

则$\{B_n,\ n\in N\}$是非空闭集的一个下降序列．其交$\bigcap_{n\in N}B_n=\phi$．显然(N,d)是完备空间。

空间的完备性不是拓扑性质．

例 5 在自然数集N中规定通常的距离为 d_1，则(N,d_1)是度量空间，而且是完备空间。若规定距离 d_2 为

$$d_2(m,n)=\frac{|m-n|}{m\cdot n},$$

则(N,d_2)是度量空间，但非完备空间.如序列 (n) 就是一个不

收敛的基本列。

又如$(-\infty,+\infty)$和$(-1,1)$组成的两个空间是同胚的，但前者是完备的，后者不是。故完备性不是拓扑性质。

对于度量空间E，若有完备空间X，及$\varphi: E\to X$是等距映射，使$\overline{\varphi(E)}=X$，则(X,φ)称为E的**完备化空间**或**完备扩张**(completion)。

定理2 任一度量空间有完备化空间，除等距不计外，完备化空间是唯一的。

证明 设E为度量空间，今考察E的所有可能的基本列$\{(a_n)\}$。在其中引入等价关系：

$$当\ n\to\infty,\ d(a_n,b_n)\to 0$$

时，规定$(a_n)\sim(b_n)$。显然$\sim$是等价关系。按此关系分类，类所构成的新空间设为X。

今在X中导入距离，设$\tilde{x},\tilde{y}\in X$，每类$\tilde{x}$，$\tilde{y}$中各取一个基本列(x_n)，(y_n)，规定

$$d_1(\tilde{x},\tilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n).$$

为了证明这个规定是合适的，先证$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$是存在的。实事上，因

$$d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)+d(y_m,y_n),$$

有

$$d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m).$$

交换n和m，有

$$d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m).$$

故

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m).$$

这个不等式的右端，因(x_n)，(y_n)是基本列，而收敛于0，故$(d(x_n,y_n))$是基本列。因实数空间是完备的，故$(d(x_n,y_n))$有极限存在。

其次证明$d_1(\tilde{x},\tilde{y})$与在$\tilde{x},\tilde{y}$中选取的基本列(x_n)，(y_n)无关。设(x'_n)，(y'_n)分别是$\tilde{x}$，$\tilde{y}$中的另一基本列．由

$$d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x'_n)+d(x'_n,y'_n)+d(y'_n,y_n),$$

可得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\leqslant\lim_{n\to\infty} d(x_n',y'_n),$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n)\leqslant\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n),$$

故

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n).$$

再验证$d_1(\tilde{x},\tilde{y})$满足距离公理．

1．由分类法可知$d_1(\tilde{x},\tilde{y})=0\Longleftrightarrow\tilde{x}=\tilde{y}$．

2．对X中任意三个元素$\tilde{x}$，$\tilde{y}$，$\tilde{z}$，设$(x_n)\in\tilde{x}$，$(y_n)\in\tilde{y}$，$(z_n)\in\tilde{z}$，则显然有

$$d_1(\tilde{x},\tilde{y})=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\leqslant\lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n)+\lim_{n\to\infty} d(y_n,z_n)=d_1(\tilde{x},\tilde{z})+d_1(\tilde{y},\tilde{z}).$$

再验证X是完备空间，设$(\tilde{x}_n)$是X的基本列，在$\tilde{x}_n$中任取序列$(x^n_k)_{k=1,2,\cdots}$．因它是基本列，故可选取k_n，使$m>k_n$时，

$$d(x^n_m,x^n_{k_n})\leqslant\frac{1}{n}.$$

观察序列

$$(x^1_{k_1},x^2_{k_2},\cdots x^n_{k_n},\cdots).$$

先证它是基本列．

由同一元素作成的序列称为常驻列，显然常驻列是收敛列且收敛于该元素．即

$$(x,x,\cdots)\in\tilde{x}.$$

显然有 $d(x,y)=d_1(\tilde{x}, \tilde{y})$。

对序列$(x_{k_n}^n)$的每个元素，做一个常驻列 $(x_{k_n}^n, x_{k_n}^n, \cdots)\in(\tilde{x}_{k_n}^n)$，于是

$$d_1(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{k_n}^n)=\lim_{n\to\infty} d(x_i^n, x_{k_n}^n)\leqslant\frac{1}{n},$$

而且

$$d(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m)=d_1(\tilde{x}_{k_n}^n, \tilde{x}_{k_m}^m)\leqslant d_1(\tilde{x}_{k_n}^n, \tilde{x}_n)+$$

$d_1(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)+d_1(\tilde{x}_m, \tilde{x}_{k_m}^m)\leqslant d_1(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$.

对任意 $\varepsilon>0$，取 n_0，使当n，$m\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{3}, d_1(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $n, m\geqslant n_0$ 时，有

$$d(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m)<\varepsilon.$$

即$(x_{k_1}^1, x_{k_2}^2, \cdots, x_{k_n}^n, \cdots)$是基本列，而属于某一类$\tilde{x}$中。

$$d_1(\tilde{x}, \tilde{x}_n)\leqslant d_1(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_n}^n)+d_1(\tilde{x}_{k_n}^n, \tilde{x}_n)\leqslant$$

$$d_1(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_n}^n)+\frac{1}{n}.$$

又因$(x_{k_n}^n)$是基本列，所以当 n 充分大时，

$$d_1(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_n}^n)=\lim_{l\to\infty} d(x_{k_p}^p, x_{k_n}^n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再选 n 使$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$，则得$d_1(\tilde{x}, \tilde{x}_n)<\varepsilon$. 即$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n=\tilde{x}$. 故$X$是完备空间。

最后证明E与X的稠子集等距．设X中含常驻列的类的集合为 E_1，令$\varphi: E\to E_1$ 为 $x\to\tilde{x}$，则φ为E到E_1上的一一对应，而且若$(x)\in\tilde{x}$，$(y)\in\tilde{y}$，则$d_1(\tilde{x}, \tilde{y})=d(x,y)$．故 φ 是E到E_1上的等距映射．

对于任意$\varepsilon>0$，和任意元素 $\tilde{x}\in X$，恒可取到$\tilde{x}_\varepsilon\in E_1$，使

$d_1(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) < \varepsilon$.实际上,设$\tilde{x}$含基本列$(x_n)$,取$n$,使当$m>n$时$d(x_m, x_n)<\varepsilon$.设$\tilde{x}_\varepsilon$为含常驻列$(x_n)$的类,则$\tilde{x}_\varepsilon \in E_1$,而且$d_1(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) = \lim\limits_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$.

综合上述,X是E的完备化空间.

另外,我们还证明E的完备化空间除等距不计外是唯一的.

实际上,设(Y, ρ)也是E的完备化空间,则Y有子空间E_2,有等距映射$\psi: E \to E_2$,$\overline{E_2} = Y$.

设$y \in Y$,则在E_2中有序列(y_n)使$y_n \to y$.令$\psi^{-1}(y_n) = x_n$,则(x_n)是E中基本列,而常驻列的类$(\tilde{x}_n)$是E_1的基本列.由X的完备性,设$\tilde{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n$,令$\tilde{x}$对应$y$,则得到$X$到$Y$的等距映射.

实际上,这个对应显然是一对一的,而且当$\tilde{x}$对应y,$\tilde{x}'$对应y'时,有

$$d_1(\tilde{x}, \tilde{x}') = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n') = \lim_{n\to\infty} \rho(\psi(x_n), \psi(x_n'))$$

$$= \rho(y, y').$$

故X和Y是等距的.

【习　　题】

1. 试证完备空间的闭子集是完备空间.
2. 任一度量空间的完备子空间是闭子集.
3. 完备空间未必是可分空间,观察m空间.
4. 举例指出完备空间的连续象未必是完备空间.
5. 在实数集中令$d(x, y) = |x - y|$,$d_1(x, y) = |x^3 - y^3|$,指出这两个距离是拓扑等价的,二者的 Cauchy 列是相同的,但它们不是一致等价的.

6. 设φ为定义在区间$0\leqslant u<+\infty$上的递增实值函数，且使$\varphi(0)=0$。若$u>0$，则$\varphi(u)>0$，且$\varphi(u+v)\leqslant\varphi(u)+\varphi(v)$。设$d(x,y)$是集$E$的距离，则$d_1(x,y)=\varphi(d(x,y))$是$E$上的另一个距离。

a. 指出若φ在点$u=0$是连续的，则距离d和d_1是一致等价的。反之，如果对于距离d_1有点$x_0\in E$，它不是E的孤立点，且若d和d_1是拓扑等价的，则φ在点$u=0$是连续的。

b. 证明函数

$u^r\ (0<r\leqslant 1)$，$\log(1+u)$，$u/1+u$，$\inf(1,u)$

满足上述条件，用最后两个可以看到对E上的任意距离，有有界的一致等价距离。

7. 设(E,d)为完备度量空间，A为E的开子集列(U_n)的交，$E_n=E\backslash U_n$，对于A的任一对点x,y，令

$$f_n(x,y)=\left|\frac{1}{d(x,E_n)}-\frac{1}{d(y,E_n)}\right|,$$

$$d_n(x,y)=f_n(x,y)/(1+f_n(x,y)),$$

$$d_A(x,y)=d(x,y)+\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x,y)/2^n.$$

指出在E的子空间A上，d_A是距离，它拓扑等价于d，且对于距离d_A，A是完备度量空间。

8. 设(E,d)为完备度量空间，$T:E\to E$，对于某实数a $(0<a<1)$及任意$x,y\in E$，恒有

$$d(T(x),T(y))\leqslant ad(x,y).$$

试证 a. 令$x_n=T(x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，$x_0\in E$，则点列(x_n)是基本列.

b. 令$x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则$T(x^*)=x^*$.

c. 若$T(x)=x$，则$x=x^*$。

9. 在完备度量空间(E,d)中，若闭集列$\{F_n:n\in N\}$的并集F具有内点，则必有某个n，使F_n具有内点(Baire theo-

rem)。

10。设A为度量空间X的稠子集。若A上的任意 Cauchy 序列在X都有极限，则X是完备的。

§ 3 扩张定理
(extension theorem)

定理 1 设f和g是度量空间(E,d)到度量空间(E,d)的两个连续映射.令$A=\{x: f(x)=g(x), x\in E\}$,则$A$在$E$中是闭集。

证明 等价的证明$E\setminus A$是开集。令 $a\in E\setminus A$，则$f(a)\neq g(a)$；设$d_1(f(a), g(a))=\alpha>0$，由f，g在点a的连续性，在E中有a的邻域V。当$x\in V$时，有$d_1(f(a), f(x))<\alpha/2$及$d_1(g(a),g(x))<\alpha/2$。于是，当$x\in V$，必有$f(x)\neq g(x)$，否则，由三角不等式将有$d_1(f(a),g(a))<\alpha$.故$V\subset E\setminus A$,而$E\setminus A$为开集。

推论 (恒等扩张原理(principle of extension of identities)).设f，g为度量空间E到度量空间E_1的两个连续映射，A为E的稠密子集.如果在A上恒有$f(x)=g(x)$，则必有$f=g$。

实际上，由定理 1，点集$\{x: f(x)=g(x), x\in E\}$必含有A且为闭集。故必须是E。

定理 2 设f，g为度量空间E到扩张实数域$\overline{R}$的两个连续映射，令$\{x: f(x)\leqslant g(x), x\in E\}=P$,则$P$为$E$中闭集.

证明 往证$E\setminus P$是开集.设$a\in E\setminus P$,即$f(a)>g(a)$,则有$\beta\in\overline{R}$,使$f(a)>\beta>g(a)$。开区间$(\beta,+\infty)$在f下的原象V是a的邻域,开区间$(-\infty,\beta)$在g下的原象W也是a的邻域。因此$V\cap W$是a的邻域，且对$x\in V\cap W$,必有$f(x)>\beta>g(x)$.故$V\cap W\subset E\setminus P$,，而$E\setminus P$是开集。

推论 (不等式扩张原理(principle of extension of ine-

qualities))。设 f，g 是度量空间 E 到扩张实数域 $\overline{R}$ 的两个连续映射．如果对于 E 的稠密子集 A 的所有点 x 有 $f(x)\leqslant g(x)$，则对于所有 $x\in E$，有 $f(x)\leqslant g(x)$．

定理 3 设 A 为度量空间 E 的稠密子集，f 是 A 到度量空间 E_1 的连续映射．在 A 上和 f 一致的 E 到 E_1 的连续映射 $\overline{f}$ 存在，当且仅当对于任意 $x\in E$，极限 $\lim\limits_{y\to x,\ y\in A} f(y)$ 在 E_1 中存在。此连续映射 $\overline{f}$ 是唯一的。

证明 若在 A 上和 f 一致的 E 到 E_1 的连续映射 $\overline{f}$ 存在，则必须有

$$\overline{f}(x)=\lim_{y\to x,\ y\in A}\overline{f}(y)=\lim_{y\to x;\ y\in A}f(y).$$

故必要性成立。唯一性是显然的。

反之，若对于任意 $x\in E$，极限 $\lim\limits_{y\to x,\ y\in A} f(y)$ 在 E_1 中存在。令 $\overline{f}(x)=\lim\limits_{y\to x;\ y\in A} f(y)$，则 $\overline{f}$ 是 E 到 E_1 的映射，且为 f 的扩张。

为证 $\overline{f}$ 是连续的，设 $x\in E$，V 是 $\overline{f}(x)$ 在 E_1 中的任一邻域，则有以 $\overline{f}(x)$ 为中心的闭球 B 被含在 V 中．由 f 在 A 的连续性及 $\overline{f}(x)$ 的定义，E 中有 x 的开邻域 U，使 $f(U\cap A)\subset B$．对于任意 $y\in U$，$\overline{f}(y)$ 是 f 在 y 点关于 A 的极限．因此也是关于 $U\cap A$ 的极限。由此，$\overline{f}(y)\in\overline{f(U\cap A)}$．因 B 是闭集，故 $\overline{f}(y)\in B$．即 $\overline{f}$ 将 U 映射到 V 中，因而 $\overline{f}$ 是连续映射．

定理 4 (Tietze-Урысон) 设 E 为度量空间，A 为 E 的闭子集，f 为 A 到实数集 R 的有界连续映射，则存在 E 到 R 的连续映射 g，在 A 上 $f=g$，且

$$\sup_{x\in E}g(x)=\sup_{y\in A}f(y),\quad \inf_{x\in E}g(x)=\inf_{y\in A}f(y).$$

证明 不失证明的一般性，可以假设 $\inf\limits_{y\in A}f(y)=1$，$\sup\limits_{y\in A}f(y)=2$。定义 $g(x)$ 如下：

当 $x \in A$ 时，令 $g(x)=f(x)$。

当 $x \in E\setminus A$ 时，令 $g(x)=(\inf\limits_{y\in A}(f(y)\cdot d(x,y)))$

$/d(x,A)$。

由不等式 $1 \leqslant f(y) \leqslant 2$（对于 $y \in A$）和 $d(x, A)$ 的定义推得关于 $x \in E\setminus A$，有 $1 \leqslant g(x) \leqslant 2$。

实际上，因 $\dfrac{d(x,y)}{d(x,A)} \geqslant 1$，且 $f(y) \geqslant 1$，故 $g(x)=$

$\inf\limits_{y\in A} \dfrac{f(y)\cdot d(x,y)}{d(x,A)} \geqslant 1$。又因 $\inf\limits_{y\in A} \dfrac{d(x,y)}{d(x,A)}=1$，而 $f(y) \leqslant 2$，

故 $g(x)=\inf\limits_{y\in A} \dfrac{f(y)d(x,y)}{d(x,A)} \leqslant 2$。

于是只需证明 g 在 E 的每点 x 的连续性。

若 $x \in A^\circ$，则由 f 的连续性得到 g 的连续性。

在开集 $E\setminus A$ 中将 g 写为

$$g(x)=h(x)/d(x,A)。$$

其中 $h(x)=\inf\limits_{y\in A} f(y)\cdot d(x,y)$。因 A 是闭集，$x \notin A$，故 $d(x,A)>0$。又因

$$|d(x,A)-d(x',A)| \geqslant d(x,x'),$$

故 $d(x,A)$ 为 x 的连续函数。为证 $g(x)$ 在 $E\setminus A$ 的连续性，只需证明 $h(x)$ 在 $E\setminus A$ 是连续的。设 $r=d(x,A)$，对于 $d(x,x') \leqslant \varepsilon < r$，我们有 $d(x,y) \leqslant d(x,x')+d(x',y) \leqslant d(x'y)+\varepsilon$。因 $f(y) \leqslant 2$，有 $h(x)=\inf\limits_{y\in A} f(y)d(x,y) < \inf\limits_{y\in A} f(y)[d(x',y)+\varepsilon]$ $=\inf\limits_{y\in A}[f(y)d(x',y)+f(y)\varepsilon] \leqslant h(x')+2\varepsilon$，故 $h(x) \leqslant h(x')+2\varepsilon$。类似的有 $h(x') \leqslant h(x)+2\varepsilon$。即只若 $d(x,x') \leqslant \varepsilon$，则有 $|h(x)-h(x')| \leqslant 2\varepsilon$。于是证明了 h 在 $E\setminus A$ 的连续性。

最后，假设 x 是 A 的边界点，给与 $\varepsilon>0$，有 $r>0$，使得对于 $y \in A \cap B(x,r)$，有 $|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$，令 $C=A\cap B(x,r)$，D

$=A\backslash C$。若 $z \in E\backslash A$ 及 $d(x,z)\leqslant\frac{r}{4}$，则对每个 $y \in D$ 有 $d(z,y)\geqslant d(x,y)-d(x,z)\geqslant 3r/4$，故

$$\inf_{y\in D}(f(y)\cdot d(z,y))\geqslant 3r/4.$$

另方面，$f(x)d(x,z)\leqslant 2d(x,z)\leqslant r/2$，于是

$$\inf_{y\in A}(f(y)d(y,z))=\inf_{y\in C}(f(y)d(y,z)).$$

但因对于 $y \in C$，有 $f(x)-\varepsilon\leqslant f(y)\leqslant f(x)+\varepsilon$ 及 $\inf\limits_{y\in C} d(y,z)=d(z,A)$，有

$$(f(x)-\varepsilon)d(z,A)\leqslant\inf_{y\in A}(f(y)d(y,z))\leqslant(f(x)+\varepsilon)d(z,A).$$

这证明了当 $z\in E\backslash A$ 及 $d(x,z)\leqslant\frac{r}{4}$ 时，有

$$|g(z)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

另方面，若 $z \in A$ 及 $d(x,z)\leqslant\frac{r}{4}$，有

$$|g(z)-f(x)|=|f(z)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

故 g 在 $F_r(A)$ 上也是连续的。

推论 设 A、B 为度量空间 E 的两个非空闭集，$A\cap B=\phi$，则存在定义在 E 上的连续函数 f，f 的值在 $[0,1]$ 中，在 A 上 $f(x)=1$，在 B 上 $f(x)=0$。

实际上，应用定理于 $A\cup B$ 到 R 的映射 φ，φ 在 A 上为 1，φ 在 B 上为 0，在 $A\cup B$ 上连续。

这个定理目前在泛函分析及代数拓扑中占据很重要的地位。它是空间 E 的闭子集 A 到空间 F 的连续映射，扩张为全空间 E 到空间 F 的连续映射的特例。

【习　　题】

1. 设 E 为度量空间，(F_n) 为其闭子集列，$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$。若 $x\notin A$，则存在定义在 E 上的有界连续函数 $f\geqslant 0$，使 $f(x)=$

0，且对于每个 $y\in A$，有 $f(y)>0$.

2. 设 f 是度量空间 (E,d) 到完备空间 (E_1,d_1) 的一致连续映射，(X,d) 为 (E,d) 的完备化空间. 则唯一存在 (X,d) 到 (E_1,d_1) 的一致连续映射 F，使在 E 上 $F=f$.（F 称为 f 到 X 上的自然扩张）

3. 设 f 是度量空间 (E,d) 到完备空间 (E_1,d_1) 的等距映射，$f(E)$ 是 Y 的稠密子集，(X,d) 是 (E,d) 的完备化空间. 则 f 到 X 上的自然扩张 F 是 X 到 E_1 上的等距映射.

4. 设 N 为自然数集，Q 为有理数集，$A=[0,1]\cap Q$，$n\to r_n$ 为 N 到 A 上的双射，在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\sum_{r_n<x}1/2^n.$$

这个和是就 $r_n<x$ 的那些 n 进行的. 试证 f 在 $[0,1]\setminus A$ 上是连续的，但不能扩张为 $[0,1]$ 上的连续函数.

§4 列紧空间

(sequentially compact space)

设 A 是度量空间 E 的子集，若 A 的每个序列都有收敛子列，则称 A 为列紧集(sequentially compact set)。若 E 本身是列紧集，则称 E 为列紧空间 (sequentially compact space).

由实变函数论已知 n 维 Euclid 空间 R^n 的任一有界闭集都是列紧集，而 R^n 不是列紧空间.

$C[a,b]$ 不是列紧空间，而且也存在有界的非列紧集. 如 $[0,1]$ 上连续函数列 $\{f_n(x)\}$：

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & x\geqslant \dfrac{1}{n}.\\ 1-nx & x<\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

则 $\{f_n(x)\}$ 是 $C[0,1]$ 的有界集，但 $\{f_n(x)\}$ 没有收敛子列.

由定义立即看出：

a．有限点集必为列紧集；

b．有限个列紧集的并集是列紧集；

c．列紧集的任一闭子集是列紧集；

d．E是列紧空间，当且仅当E的任一闭子集是列紧集。

定理1 在列紧集中基本列必是收敛列。

证明 设(x_n)是列紧集A的基本列，因A是列紧集，故(x_n)必有收敛子列(x_{n_k})。设$x_{n_k}\to x_0$，则对任意$\varepsilon>0$，有N_0，当$n_k\geqslant N_0$时，$d(x_{n_k}, x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，因$(x_n)$是基本列，故有$N_1$，当$m$，$n\geqslant N_1$时，$d(x_m, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$。令$N_2=\max\{N_0, N_1\}$，则当$n, n_k\geqslant N_2$时，$d(x_n, x_0)\leqslant d(x_n, x_{n_k})+d(x_{n_k}, x_0)<\varepsilon$。故$x_n\to x_0$。

推论 列紧空间是完备空间。

反之，完备空间未必是列紧空间，如实数空间。

当E的覆盖是由开集组成的，称为E的开覆盖（open covering）。设E为度量空间，如果对于E的任一开覆盖$(U_\lambda)_{\lambda\in L}$，存在$E$的有限子覆盖$(U_\lambda)_{\lambda\in H}$，即$H\subset L$，$H$为有限集。则称$E$为紧空间（compact space）。

如果对于任一$\varepsilon>0$，存在E的有限子集F，使对任意$x\in E$，均有$d(x,F)<\varepsilon$成立，则称E为准紧的（precompact）或全有界的（totally bounded）。F称为E的有限ε－网。

定理2 度量空间E的下列三条件等价：

a．E是紧空间；

b．E是列紧空间；

c．E是准紧空间且完备空间。

证明：a⇒b紧空间必是列紧空间。实际上，设(x_n)是紧空间E的序列，令F_n是集$\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$的闭包，我们证明有点属于所有的F_n。否则，令$U_n=E\backslash F_n$，则$\{U_n\}$形成E的覆盖。由空间的紧性，必有有限个U_{n_1}，U_{n_2}，U_{n_k}作成E的覆盖。

即$F_{n_1}\cap F_{n_2}\cap\cdots\cap F_{n_k}=\phi$。但这是不可能的。因若 $n>\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$，则 F_n 被包含在所有的 F_{n_i} $(1\leqslant i\leqslant k)$ 中。故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 最少含有一点 a。亦即(x_n)必有收敛于 a 的子列。

b⇒c 由定理1知列紧空间是完备空间。今证明列紧空间必是全有界的。

否则，必有 $\varepsilon>0$，使 E 没有有限 ε-网。任取 $x_1\in E$，必有 $x_2\in E$，使 $d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon$。否则$\{x_1\}$就是$\varepsilon$-网。同理，必有 $x_3\in E$，使 $d(x_1,x_3)\geqslant\varepsilon$，$d(x_2,x_3)\geqslant\varepsilon$。如此下去，取得序列$(x_n)$，当 $i\neq j$ 时 $d(x_i,x_j)\geqslant\varepsilon$。这个序列$(x_n)$显然不含有收敛子列。矛盾。

c⇒a 若 E 为完备的准紧空间，则 E 必为紧空间。实际上，若 E 有开覆盖$\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$，它没有有限子族覆盖 E。用下述方法做出一列球 (B_n)。设 B_{n-1}的半径为$1/2^{n-1}$，且$\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$ 没有有限子族覆盖B_{n-1}，由准紧性考虑半径为$1/2^n$ 的球做成的 E 的有限覆盖$\{V_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$。在 $V_k\cap B_{n-1}\neq\phi$ 的 V_k 中必有一个 V_k 使$\{U_\lambda\}$没有有限子族覆盖 V_k。否则，有限个 V_k 覆盖B_{n-1}，而(U_λ)将有有限子族覆盖 B_{n-1}。取这个 V_k 为 B_n。设 x_n 为B_n 的球心，因 $B_n\cap B_{n-1}\neq\phi$，由三角不等式，有

$$d(x_n,x_{n-1})\leqslant 1/2^{n-1}+1/2^n\leqslant 1/2^{n-2}.$$

因此，当 $p,q\geqslant n$时，有

$$d(x_p,x_q)\leqslant d(x_p,x_{p+1})+\cdots+d(x_{q-1},x_q)$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{q-2}}\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}.$$

即(x_n)是 E 的 Cauchy 序列。因 E 是完备的，故它收敛于一点 a。设 $a\in U_{\lambda_1}$，则有 $\alpha>0$，使 $B(a,\alpha)\subset U_{\lambda_1}$。因 $x_n\to a$，故有 n，使 $d(a,x_n)<\alpha/2$，且 $1/2^n<\alpha/2$。故由三角不等式指出 $B_n\subset B(a,\alpha)\subset U_{\lambda_1}$，但$(U_\lambda)$没有有限子族覆盖 B_n，矛盾。

定理 3 任一准紧度量空间是可分空间。

证明 设 E 是准紧度量空间，故对 $\frac{1}{n}$ 有有限 $\frac{1}{n}$-网 A_n，使得对于任一 $x \in E$，有 $d(x, A_n) < \frac{1}{n}$。令 $A = \bigcup_n A_n$。则 A 是至多可列集，且对每个 $x \in E$ 及任一 n，有 $d(x, A) \leqslant d(x, A_n) < 1/n$。故 $d(x, A) = 0$，而 $E = \overline{A}$。

定理 4 紧度量空间 E 到度量空间 E_1 的任意连续映射 f 是一致连续的。

证明 假设相反，于是存在数 $\alpha > 0$ 及两个 E 的点列 (x_n) 和 (y_n)，使得 $d(x_n, y_n) < 1/n$ 及 $d_1(f(x_n), f(y_n)) \leqslant \alpha$。因空间 E 是紧的，故 (x_n) 有子列 (x_{n_k}) 收敛于点 a。因 $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$，由三角不等式，故序列 (y_{n_k}) 也收敛于 a。但 f 在 a 点是连续的，故有 $\delta > 0$，对于 $d(a, x) < \delta$ 有 $d_1(f(a), f(x)) < \alpha/2$。取 k，使 $d(a, x_{n_k}) < \delta$，$d(a, y_{n_k}) < \delta$，则 $d_1(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leqslant d_1(f(x_{n_k}), f(a)) + d_1(f(y_{n_k}), f(a)) < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} < \alpha$，这与序列 (x_{n_k})，(y_{n_k}) 的取法矛盾。

如果度量空间 E 的子空间 A 是紧空间，则称度量空间 E 的子集 A 是紧集（compact set）。类似的可定义准紧集（precompact set）。

由定义可直接推得：

a. 任一准紧集是有界的。

实际上，有界集的有限并是有界集。

一般的，有界集却未必是准紧的。

b. 度量空间的任意紧子集 A 是闭集。

实际上，紧子空间是完备空间，即 A 中任意收敛序列的极限必在 A 中，故 A 的接触点皆在 A 中，即 A 是闭集。

定理5 紧度量空间E的任意闭子集A是紧的。

证明 设$\{U_\lambda: \lambda \in L\}$为$A$的任意开覆盖.做集族$\mathfrak{M} = \{U_\lambda : \lambda \in L\} \cup \{\mathscr{C}A\}$，则$\mathfrak{M}$是$E$的开覆盖．因$E$是紧的，故$\mathfrak{M}$有有限子覆盖$\{U_\lambda: \lambda \in H\} \cup \{\mathscr{C}A\}$．于是 $\{U_\lambda: \lambda \in H\}$是$A$的有限覆盖．故$A$是紧集．

定理6 紧集的连续象是紧的．

证明 设$f:(E,d)\to(E_1,d_1)$是连续映射，A为E的紧子集，证明$f(A)$是紧集．设$\{U_\lambda: \lambda \in L\}$是$f(A)$的任一开覆盖,则集族$\{A \cap f^{-1}(U_\lambda)\}$形成子空间$A$的开覆盖.因$A$是紧集,故$L$有有限子集$H$，使$\{A \cap f^{-1}(U_\lambda): \lambda \in H\}$是$A$的覆盖．于是$\{U_\lambda = f(A \cap f^{-1}(U_\lambda)): \lambda \in H\}$ 做成$f(A)$的有限覆盖．故$f(A)$是紧集．

定理7 设A是度量空间E的紧集，$f(x)$是A上定义的实值连续函数，则

a．$f(A)$是有界集．

b．$f(A)$有最大值和最小值．

证明 由定理6 $f(A)$是紧集，紧集必为准紧集，而准紧集又必为有界集，故$f(A)$是有界集．

又由定理6及定理5前的b知$f(A)$必为闭集，而$\sup f(A)$及$\inf f(A)$都是$f(A)$的接触点，故必皆在$f(A)$中．即有$a, b \in A$，使$f(a) = \sup f(A)$，$f(b) = \inf f(A)$．

定理8 设A为度量空间E的紧子集,则集族$\{V_r(A): r > 0\}$形成A的基本邻域系．

证明 设U为A的邻域，$g: A \to R$为

$$g(x) = d(x, E\backslash U)．$$

则 $g(x) > 0$ 且在A上连续.故由定理7有一点$x_0 \in A$使$g(x_0) = d(x_0, E\backslash U) = \inf\limits_{x\in A} d(x, E\backslash U)$.$g(x_0)$,显然是大于0的,令$g(x_0) = r$，则$V_r(A) \subset U$．故集族 $\{V_r(A)\}$形成A的基本邻域系．

定理9 设E为紧度量空间,$f: E \to E_1$为连续单射,则f是

E 到 $f(E)$上的同胚。

证明 由第一章§5定理3，只需证明E的每个闭子集A，$f(A)$是$f(E)$的闭子集。由定理5紧空间的闭子集是紧集，由定理6紧集的连续象是紧集，而紧集是闭集，故$f(A)$是$f(E)$的闭子集。

【习 题】

1．在度量空间E中，A为紧子集，B为闭子集，且$A\cap B=\phi$，试证$d(A,B)>0$。

2．设$f: E\to E_1$为一致连续映射，试证f将准紧子集映射为准紧子集。

3．设E, E_1为度量空间，$f: E\to E_1$，试证若f在E的任意紧子空间上的限制是连续的，则f在E上也是连续的。

4．设(E,d)为紧度量空间，$f: E\to E$，对于E的任意二点x, y，恒有$d(f(x),f(y))\geqslant d(x,y)$，试证$f$是$E$到$E$上的等距映射。

5．设E为度量空间，则下列三个性质中任意两个成立时第三个也必成立：

a．E是紧空间；

b．E是离散空间；

c．E是有限空间。

6．紧度量空间中仅有一个接触点的序列必收敛。

7．设E为紧度量空间，$(U_\lambda: \lambda\in L)$是$E$的开覆盖，试证有数$\alpha>0$，使任意半径为$\alpha$的开球至少包含在一个$U_\lambda$中（Lebesque 性质）。

8．给出一个例子指出准紧空间中上题结果不成立。

9．对于度量空间E，指出下列性质等价：

a．E是紧的；

b．E的任意可数开覆盖含有有限子覆盖；

c．E的任意非空闭集的递减序列(F_n)有非空交；

d．对于E的任意无限开覆盖$\{U_\lambda: \lambda \in L\}$，有$\{U_\lambda: \lambda \in H, H \neq L, H \subset L\}$仍然是$E$的覆盖；

e．E的任意点态有限开覆盖$\{U_\lambda: \lambda \in L\}$（即对每点$x \in E$，仅有有限个$U_\lambda$含有$x$）必含有有限子覆盖；

f．E的每个离散的无限子空间不是闭的。

10．设(E,d)为度量空间，$\mathscr{F}(E)$为E的所有非空闭子集族，$\delta(E)<\infty$．对于$\mathscr{F}(E)$的任意两个元素A、B，设$\rho(A,B) = \sup\limits_{x \in A} d(x,B)$，$h(A,B) = \sup(\rho(A,B),\rho(B,A))$，则：

a．试证$(\mathscr{F}(E),h)$是度量空间；

b．如果E是完备的，则$\mathscr{F}(E)$也是完备的；

c．如果E是准紧的，则$\mathscr{F}(E)$是准紧的；

d．如果E是紧的，则$\mathscr{F}(E)$是紧的；

e．对于$\mathscr{F}(E)$的任意四个元素A、B、C、D，必有$h(A \cup B, C \cup D) \leqslant \max(h(A,C),h(B,D))$．

11．设A、B为伪度量空间的不相交闭子集，且A是紧集，则有元素$a \in A$使得$D(A,B) = d(a,B) > 0$．

12．设A、B为伪度量空间的不相交闭且紧子集，则有$a \in A$，$b \in B$，使$d(a,b) = D(A,B)$．

§5　相关紧集与局部紧空间
(relatively compact set and locally compact spaces)

设A为度量空间E的子集．如果A的闭包$\overline{A}$是紧的，则称A为E的**相关紧集**(relatively compact set)．

由定义可直接推得相关紧集的任意子集是相关紧的．

定理1　相关紧集是准紧的，在完备空间中准紧集是相关

紧的。

证明 若A是相关紧集，则$\overline{A}$是紧集。由§4定理2，$\overline{A}$必是准紧集。故A是准紧集。

设E为完备空间，A为其准紧子集。则对于任意$\varepsilon>0$，有有限$\varepsilon/2$—网$C_{\frac{\varepsilon}{2}}$，即$\{B(c_k,\frac{\varepsilon}{2}):k=1,2,\cdots,n(\frac{\varepsilon}{2}),\ c_k\in C_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$覆盖$A$。令$D_k=\overline{B}(c_k,\varepsilon)$，则$\bigcup D_k\supset\overline{A}$。即$\overline{A}$是准紧集。又因$\overline{A}$是完备空间的闭子空间，由§4习题1，$\overline{A}$是完备的。再由§4定理2知$\overline{A}$是紧集。故$A$是相关紧的。

一般说来，准紧集未必是相关紧的。可观察非完备的准紧空间。

定理2 （Borel-Lebesque定理）实数集的子集是相关紧的，当且仅当它是有界的。

证明 由定理1相关紧集是准紧集。而准紧集是有界集，故必要性成立。

设实数集A是有界集，则必有区间$[a,b]$使$A\subset[a,b]$。对任意$n\in N$，令$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}$，则

$$\{B(x_k,\frac{1}{n}):k=0,\cdots,n\}$$

覆盖$[a,b]$。故$[a,b]$是准紧集。因实数空间是完备空间，由定理1知A是相关紧的。故充分性成立。

定理3 度量空间E的子集A是相关紧的，当且仅当A的任意序列在E中有接触点。

证明 若A是度量空间E的相关紧集，则$\overline{A}$是紧集。由§4定理2知$\overline{A}$是列紧的。故A的任意序列在$\overline{A}$中必有收敛子列。即A的任意序列在$\overline{A}$中必有接触点，故在E中也必有接触点。

设(x_n)是$\overline{A}$的任一序列，由闭包的定义，对任一n，有$y_n\in A$，使$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$，由条件知(y_n)有子列(y_{n_k})收敛于E

的点 a。由三角不等式知(x_{k_i})也收敛于 a，故$\overline{A}$是紧集，而A是相关紧的。

定理 4 两个相关紧集的并集是相关紧集。

证明 因$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$，故只需证明二紧集 A,B 的并是紧的。

设$\{U_\lambda:\lambda\in L\}$是子空间$A\cup B$的开覆盖，由§1定理5知$E$中有开集$V_\lambda$，使 $U_\lambda=(A\cup B)\cap V_\lambda$。因$A$是紧集，故$L$有有限子集$H$，使$\{A\cap V_\lambda:\lambda\in H\}$是$A$的覆盖，因$B$是紧集，故$L$有有限子集$K$，使 $\{B\cap V_\lambda:\lambda\in K\}$是$B$的覆盖。则族$\{(A\cup B)\cap V_\lambda:\lambda\in H\cup K\}$显然是$A\cup B$的有限覆盖。故$A\cup B$是紧集。

推论 有限个相关紧集的并集是相关紧集。

设E为度量空间。如果对于每点$x\in E$，在E中有x的紧邻域，则称E为**局部紧空间**(locally compact space)。

任意离散空间是局部紧的，但不是紧的，除非它是有限的。

由Borel—Lebesque 定理直接推得实直线是局部紧的，但不是紧的。

定理 5 *设A是局部紧度量空间E的紧集，则存在$r>0$，使$V_r(A)$在E中是相关紧的。*

证明 对每个$x\in A$，有x的紧邻域V_x，于是$\{V_x^\circ:x\in A\}$形成A的开覆盖。因A是紧的，故有有限子集$\{x_1,\cdots,x_n\}$使$\{V_{x_i}^\circ:1\leqslant i\leqslant n\}$形成$A$的开覆盖。由定理4的推论知$U=\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}$是紧的。因$\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}^\circ\supset A$，故$U$为$A$的紧邻域。由§4定理8知$\{V_r(A):r>0\}$是紧集$A$的基本邻域系，故有$V_r(A)$，使$A\subset V_r(A)\subset U$。因$U$是紧集，故$V_r(A)$是相关紧集。

定理 6 *设E是局部紧度量空间，则下列性质是等价的：*

a. E中存在开相关紧集的递增序列(U_n)，使得对每个n

有$\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ 并且$E=\bigcup_n U_n$；

b. E是紧子集的可数并；

c. E是可分的。

证明 因$\overline{U}_n$是紧集，故 a ⇒ b。

若E为紧集列（K_n）的并，则由§4定理3知每个子空间K_n是可分的。设 D_n为K_n中的至多可数的稠密子集（关于K_n），则 $D=\bigcup_n D_n$是至多可数集，并且在E中稠密。实际上

$$E=\bigcup_n K_n \subset \bigcup_n \overline{D}_n \subset \overline{D}$$

故b ⇒ c。

设E是可分空间，由§1定理4，设(V_n)是E的至多可数的开集基。对每个$x\in E$，有一个x的紧邻域W_x，由§1定理3，有 $n(x)$，使$x\in V_{n(x)}\subset W_x$。于是，那些相关紧的V_n已构成E的开集基。故可以假设所有V_n是相关紧的。

令$U_1=V_1$，$U_{n+1}=V_{n+1}\cup V_r(\overline{U}_n)$，其中$r>0$，$V_r(\overline{U}_n)$是相关紧的。由定理5这是可能的。则得到序列（$U_n$）满足性质a。故c ⇒ a。

定理7 局部紧空间E的每个开子空间及每个闭子空间都是局部紧的。

证明 设A为E的开子集。对每个$a\in A$，由E的局部紧性有紧闭球$\overline{B}(a,r)\subset E$。因$A$是开集，故有$r'\leqslant r$，使球$\overline{B}(a,r')$含在$A$中。它是紧的，故$A$为局部紧的。

设A为E的闭子集，$a\in A$，若V是a在E中的紧邻域，则$V\cap A$是a在A中的邻域，并且是紧的，故A是局部紧的。

【习　题】

1. 若A为度量空间E的局部紧子空间，则A在E中是局

部闭的。

2. 试证：局部紧度量空间的二局部紧子空间的交是局部紧的。

3. 在实直线上给出例子，指出二局部紧子空间的并未必是局部紧的；局部紧子空间的补集未必是局部紧的。

4. 举出非完备的局部紧度量空间的例子。

5. 设E为度量空间，存在数$r>0$，使每个闭球$\overline{B}(x, r)$ ($x \in E$)是紧的，试指出E是完备的，并且对于E的任意相关紧子集A，使$d(x, A) \leqslant r/2$的$x \in E$的点集$\overline{V}_{r/2}(A)$是紧的。

6. 设E为度量空间。若E中每个有界集是相关紧的，则E是局部紧且可分的。

7. 设(E,d)是局部紧、非紧的可分度量空间，设(U_n)是E的相关紧开子集序列，使$\overline{U}_n \subset U_{n+1}, E=\bigcup_n U_n$ 则存在E的实值连续函数f，使得对于$x \in \overline{U}_n$有$f(x) \leqslant n$，对于$x \in E \setminus \overline{U}_n$有$f(x) \geqslant n$；距离$d_1(x,y)=d(x,y)+|f(x)-f(y)|$拓扑等价于$d$；对于$d_1$的任意有界集是相关紧的。

§6 积空间

(product space)

设$\{(E_i,d_i): i=1,\cdots,n\}$是$n$个度量空间，令$E=\prod_{i=1}^{n} E_i$。对于$E$的任意二点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，令

$$d(x,y)=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2),\cdots,d_n(x_n,y_n)\}.$$

容易验证，d满足距离公理。(E,d)称为$(E_1,d_1),\cdots,(E_n,d_n)$的积空间(product space)。

容易看出，由$d_0(x,y)=\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$，

$$d_b(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{r}[d_i(x_i,y_i)]^2}$$

确定的 d_a, d_b 也是E上的距离函数。因

$$d(x,y) \leqslant d_b(x,y) \leqslant d_a(x,y) \leqslant n\, d(x,y),$$

故 d、d_a、d_b 是一致等价的。于是，对于涉及拓扑性质、Cauchy序列和一致连续函数等所有问题，在E上取距离 d、d_a、d_b 的任意一个都是等价的。以后将以 d 为代表考虑之。

定理 1 对于任意点 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in E$，任意 $r>0$，我们有 $B(a,r)=B_1(a_1,r)\times\cdots\times B_n(a_n,r)$，及 $\overline{B}(a,r)=\overline{B}_1(a_1,r)\times\overline{B_2}(a_2,r)\times\cdots\times\overline{B}_n(a_n,r)$。

由 d 的定义立即得出。

定理 2 若 A_i 是 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的开集，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 是E的开集。

证明 任取点 $a=(a_1,a_2\cdots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，则存在 $r_1,r_2,\cdots,r_n(>0)$，使 $B_i(a_i,r_i)\subset A_i(i=1,2,\cdots,n)$。取 $r=\min(r_1,r_2,\cdots,r_n)$。则由定理1，$B(a,r)\subset A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$。故 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 是E的开集。

定理 3 若 $A_i\subset E_i(i=1,2,\cdots,n)$，则有 $\overline{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}=\overline{A_1}\times\overline{A_2}\times\cdots\times\overline{A_n}$。特别的，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 在 E 中是闭集，当且仅当 A_i 在 E_i 中是闭集 $(i=1,2,\cdots,n)$。

证明 若 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\overline{A_1}\times\overline{A_2}\times\cdots\times\overline{A_n}$，则由假设，对任意 $\varepsilon>0$，有 $x_i\in A_i(i=1,2,\cdots,n)$，使 $d_i(a_i,x_i)<\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots,n)$。令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则有 $d(a,x)<\varepsilon$，$\therefore a\in\overline{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}$。

反之，若 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\notin\overline{A_1}\times\overline{A_2}\times\cdots\times\overline{A_n}$，则必有某 i，使 $a_i\notin\overline{A_i}$。不失一般性，不妨设 $a_1\notin\overline{A_1}$，由定理2，$E_1\backslash\overline{A_1}\times E_2\times\cdots\times E_n$ 为含 a 的开集。显然这个开集和 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 不相交，故 $a\notin\overline{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}$。

定理 4 设 $f:(F,\rho)\to(E,d)$，$f_i=p_i\circ f:(F,\rho)\to(E_i,d_i)$，

$i=1,2,\cdots,n$。则 f 在 z_0 点是连续的，当且仅当 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 z_0 点都是连续的。

证明 当 f 为连续时，由定义，对应 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$。当 $z\in B(z_0,\delta)$ 时，$f(z)\in B(f(z_0),\varepsilon)$。即有 $f_i(z)\in B(f_i(z_0),\varepsilon)$，$i=1,2,\cdots,n$。故 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 z_0 点连续。

反之，对任意 $\varepsilon>0$，有正数 $\delta_i(i=1,2,\cdots,n)$，使当 $z\in B(z_0,\delta_i)$ 时，$f_i(z)\in B_i(f_i(z_0),\varepsilon)$，$i=1,2,\cdots,n$。取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$，则当 $z\in B(z_0,\delta)$ 时，$f_i(z)\in B_i(f_i(z_0),\varepsilon)$，$i=1,2,\cdots,n$，故 $f(z)\in B(f(z_0),\varepsilon)$。即 f 在 z_0 点连续。

推论1 设 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 是度量空间 F 的子空间 A 到 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 的映射，$a\in\overline{A}$，则 f 在 a 点关于 A 有极限的充要条件是极限

$$b_i=\lim_{z\to a,z\in A}f_i(z),i=1,2,\cdots,n$$

都存在。且

$$\lim_{z\to a,\ z\in A}f(z)=b=(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

推论2 E 的序列 $(z_k)(z_k=(x_{k1},x_{k2},\cdots x_{kn}))$ 是收敛的，当且仅当极限

$$a_i=\lim_{k\to\infty}x_{ki}\quad i=1,2,\cdots,n$$

存在，且

$$\lim_{k\to\infty}z_k=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

定理5 射影 p_i 是连续开映射。

证明 设 A_i 为 E_i 的子集，$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$p_i(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)=A_i,\quad p_i^{-1}(A_i)=A_i\times\prod_{j\neq i}E_j$$

可见 p_i 是连续的。

设 G 为 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 的开集，对于 $x_i\in p_i(G)$，有 $(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\in G$，且有 $B((x_1,x_2,\cdots,x_n),r)\subset G$，于是 $p_i(B((x_1,\cdots,x_n),r))=B(x_i,r)\subset p_i(G)$，故 $p_i(G)$ 是开集。

定理6 设 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为度量空间，$E=E_1\times E_2\times\cdots$

$\times E_n$是下列类型之一的空间：

a．离散；b．有界；c．可分；d．完备；e．紧；

f．准紧；g．局部紧，

当且仅当$E_i(i=1,2,\cdots,n)$都是同样类型的空间。

证明　对于任意$a_i\in E_i$，$i=1,2,\cdots,n$，映射$g_i:x_i\to(a_1,a_2,\cdots a_{i-1},x_i,a_{i+1},\cdots,a_n)$是$E_i$到$\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_{i-1}\}\times E_i\times\{a_{i+1}\}\times\cdots\times\{a_n\}$的等距映射。

实际上，由$g_i(x_i)=(a_1,a_2,\cdots,x_i,\cdots,a_n)$，$g_i(x_i')=(a_1,a_2,\cdots,x_i',\cdots,a_n)$，有

$$d[(a_1,a_2,\cdots,x_i,\cdots a_n),(a_1,a_2\cdots,x_i',\cdots,a_n)]$$
$$=\max_{j\neq i}[d_i(x_i,x_i'),d_j(a_j,a_j)]=d_i(x_i,x_i').$$

又因$\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_{i-1}\}\times E_i\times\{a_{i+1}\}\times\cdots\times\{a_n\}$为$E$的闭子空间，故每个因子空间与积空间的闭子空间等距。

当E为离散或有界时，E_i必为离散或有界的。当E为可分的，则由§1第7题知E_i与可分空间等距，故E_i也是可分空间。当E_i为完备的，则由§2第1题知E_i为完备的。当E为紧的或准紧的，则由§4的定理5知，E_i也是紧的或准紧的。当E为局部紧的，则由§5定理7知E_i是局部紧的。故必要性全部成立。

当E_i都是离散或有界时，由E的距离的定义，知E是离散或有界的。当E_i都是可分空间，若D_i是E_i的至多可数的稠密子集$(i=1,2,\cdots,n)$，则$D_1\times D_2\times\cdots\times D_n$是至多可数集，且由定理3知，它在$E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$中稠密。故$E$是可分的。

当$E_i(i=1,2,\cdots,n)$为完备空间，(z_k)为E的Cauchy序列，则$(p_i(z_k))$是E_i的Cauchy序列。因E_i是完备的，故有$a_i\in E_i$，使$p_i(z_k)\to a_i(i=1,2,\cdots,n)$。由定理4的推论2，有$z_k\to(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

关于准紧性．对任意$\varepsilon>0$，设$A_{ij}(j=1,2,\cdots,i_k)$是E_i的直径小于ε的有限覆盖，$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$A_{1k_1}\times A_{2k_2}\times\cdots\times A_{nk_n}(1\leqslant k_i\leqslant t_i).$$

都是E的直径小于ε的子集，它们构成E的有限覆盖．故E是准紧的．

当E_i $(i=1,2,\cdots,n)$是紧的，由§4定理2知E_i $(i=1,2,\cdots,n)$是全有界且完备的．由上述结果知E是全有界且完备的，再由§4定理2知E是紧的．

当$E_i(i=1,2,\cdots,n)$是局部紧的，则在各因子空间中每点都有紧邻域，从而在积空间中每点也都有紧邻域，故E是局部紧的。

到此充分性全部证完。

定理7 $E=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$的子集$A$是相关紧的，当且仅当$p_i(A)$在$E_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$中是相关紧的。

证明 设A是相关紧的，因p_i是连续的，故$p_i(A)$在E_i中是相关紧的。

反之，因$p_i(A)$分别在E_i中是相关紧的，故$\overline{p_i(A)}$是紧的。由定理3，有$\overline{p_1(A)\times p_2(A)\times\cdots\times p_n(A)}=\overline{p_1(A)}\times\overline{p_2(A)}\times\cdots\times\overline{p_n(A)}$．由定理6，知$\overline{p_1(A)\times p_2(A)\times\cdots\times p_n(A)}$是紧的，于是$p_1(A)\times p_2(A)\times\cdots\times p_n(A)$是相关紧的．而$A$为$p_1(A)\times p_2(A)\times\cdots\times p_n(A)$的子集．由相关紧集的性质知$A$是相关紧的。

【习　　题】

1．设E、F为二度量空间，$A\subset E$，$B\subset F$，则$F_r(A\times B)=(F_r(A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times F_r(B))$．

2．设$E_i(i=1,2,\cdots,n)$为度量空间，A_i为E_i的紧子集．若W为$\prod_{i=1}^{n}A_i$在$\prod_{i=1}^{n}E_i$中的任意邻域，则A_i在E_i中存在邻

域 U_i，使 $\prod_{i=1}^{n} U_i \subset W$。

3. 设E为紧度量空间，F为度量空间，A为$E \times F$的闭子集，则A到F中的射影是闭集。

4. 设E是度量空间，对每个度量空间F及$E \times F$的每个闭子集A，使A到F中的射影在F中都是闭集，则 E 是紧空间。

5. 设E是紧度量空间，F是度量空间，A是$E \times F$的闭子集，$p_F(A)=B$。令$y_0 \in B$，且令$C=A^{-1}(y_0)=\{x: x \in E, (x,y_0) \in A\}$，则对于$E$中$C$的任意邻域$V$，有$F$中$y_0$的邻域$W$，使当$y \in W$时，有$A^{-1}(y) \subset V$。

6. 设f为度量空间E到度量空间F的映射，$G=\{(x, f(x)): x \in E\}$称为f在$E \times F$中的图象(graph)，试证：若f是连续的，则G在$E \times F$中是闭的，且p_E在G上的限制是G到E上的同胚。反之，若F是紧的，G在$E \times F$中是闭的，则f是连续的。

7. 设F是度量空间，使得对于任意度量空间E，E到F中的图象在$E \times F$中是闭的映射是连续的，则F是紧的。

8. 设E、F、G是三个度量空间，A是$E \times F$的子集，B是$F \times G$的子集，$C=B \circ A=\{(x,z) \in E \times G \mid 有 y \in F, 使 (x,y) \in A 且 (y,z) \in B\}$。假设$A$和$B$都是闭的且$A$到$F$的射影是相关紧的，则$C$在$E \times G$中是闭的。

9. 设$\{(E_n, d_n): n \in N\}$是度量空间的序列，且$\delta(E_n) \leqslant 1$。设$E=\{(x_n): x_n \in E_n, n \in N\}$。

a. 试证：在E上函数$d((x_n),(y_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$为距离函数。

b. 对于任意$x=(x_n) \in E$，任意整数 $m \geqslant 1$ 和任意数 $r>0$，令 $V_m(x,r)$ 是所有$y=(y_n) \in E$的集，其中 (y_n) 满足当 $k \leqslant m$ 时 $d_k(x_k, y_k)<r$，则对所有的m和r，集 $\{V_m(x,r)\}$

组成E中x的基本邻域系。

c．$(x^{(m)}: x^{(m)}=(x_n^{(m)}), m\in N)$在$E$中收敛于$a=(a_n)$的充要条件是对每个$n$,序列$(x_n^{(m)}: m\in N)$在$E_n$中收敛于$a_n$。

d．E是完备空间，当且仅当每个E_n是完备空间。

e．对每个n,令A_n是E_n的子集,则在E中$A=\prod_{n=1}^{\infty} A_n$的闭包等于$\prod_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n$。

f．E是紧的，当且仅当每个E_n是紧的。

g．E是局部紧的，当且仅当每个E_n是局部紧的，并且除有限个外都是紧的。

第三章　拓扑空间
(topological space)

将度量空间进一步抽象化得到拓扑空间.

在集合 X 上确定拓扑的方法是多样的. 1914年 Hausdorff 由邻域系确定拓扑以来，由开集系、闭集系、开核算子、闭包算子、收敛类等方法定义拓扑均可. 它们所确定的拓扑是一致的.

本书从目前比较通用的由开集系建立拓扑的方法开始叙述. 这种方法始于 Александров 和 Hopf.

§1　拓　　扑
(topology)

对于非空集 X 的子集族 $\mathscr{T}$，下述三个条件（开集公理）成立时，称为 $\mathscr{T}$ 确定 X 的拓扑.

T_a,　$X\in\mathscr{T}$，$\phi\in\mathscr{T}$;

T_b,　若 $U_\lambda\in\mathscr{T}$，$(\lambda\in D)$，则 $\bigcup_{\lambda\in D}U_\lambda\in\mathscr{T}$（$D$ 是任意集）;

T_c,　若 $U_1, U_2, \cdots, U_n\in\mathscr{T}$，则 $U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n\in\mathscr{T}$.

确定拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合 X 称为拓扑空间(topological space)，记作 $(X,\mathscr{T})$. 当不致发生误解时，可以简记为 X. X 的元素称为点(point). 属于 $\mathscr{T}$ 的 X 的子集称为 X 的开集(open set). $\mathscr{T}$ 也称为关于 X 的拓扑.

由第一章 §3知，度量空间是拓扑空间.

由拓扑的条件知，对于$(X, \mathscr{T})$必有X，$\phi\in\mathscr{T}$.

例 1　当$\mathscr{T}_I=\{X, \phi\}$时，$(X, \mathscr{T}_I)$称为密集空间(indiscrete space)，$\mathscr{T}_I$称为密集拓扑(indiscrete topology)。这是开集最少的极端情形，只有两个开集.

例 2　当$\mathscr{T}_d=\{E: E\subset X\}$时，$(X, \mathscr{T}_d)$称为离散空间(discrete space)，$\mathscr{T}_d$称为离散拓扑(discrete topology).这是开集最多的极端情形，X的一切子集都是开集.

在同一集合X上若能确定两个拓扑$\mathscr{T}_1$,$\mathscr{T}_2$,即$(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_2)$都是拓扑空间,且$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$时,称为$\mathscr{T}_1$粗于(coarser)或弱于(weaker)$\mathscr{T}_2$，或者说$\mathscr{T}_2$细于(finer)或强于(stronger)$\mathscr{T}_1$，记作$\mathscr{T}_2>\mathscr{T}_1$.

对于任意拓扑空间$(X, \mathscr{T})$恒有

$$\mathscr{T}_I\subset\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_d.$$

故$\mathscr{T}_I$是最粗拓扑，而$\mathscr{T}_d$是最细拓扑.

当X仅有一点时,$\mathscr{T}_I=\mathscr{T}_d$是X的唯一拓扑. 当X多于一点时，$\mathscr{T}_I\neq\mathscr{T}_d$. 故任意非空集合上都有拓扑,且当X多于一点时，拓扑不是唯一的.

拓扑的强弱关系是序关系，即设$\mathscr{T}_1$,$\mathscr{T}_2$,$\mathscr{T}_3$是集X上的拓扑，若$\mathscr{T}_1>\mathscr{T}_2$，$\mathscr{T}_2>\mathscr{T}_3$，则$\mathscr{T}_1>\mathscr{T}_3$.

例 3　设$X=\{a, b\}$，令$\mathscr{T}_1=\{\phi, \{a, b\}\}$，$\mathscr{T}_2=\{\phi, \{a\}, \{a, b\}\}$,$\mathscr{T}_3=\{\phi, \{b\}, \{a, b\}\}$,$\mathscr{T}_4=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，则$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$，$\mathscr{T}_3$，$\mathscr{T}_4$都是X上的拓扑.

$(X, \mathscr{T}_1)$是密集拓扑,$(X,\mathscr{T}_4)$是离散拓扑,且$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2\subset\mathscr{T}_4$,$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_3\subset\mathscr{T}_4$,而$\mathscr{T}_2$和$\mathscr{T}_3$不能比较(not comparable).

例 4　设$X=\{a, b, c, d\}$，$A=\{a, b\}$,$B=\{c, d\}$. 令$\mathscr{T}_1=\{\phi, X\}$,$\mathscr{T}_2=\{\phi, A, X\}$，$\mathscr{T}_3=\{\phi, B, X\}$，$\mathscr{T}_4=\{\phi, A, B, X\}$,它们都满足开集公理,故$(X, \mathscr{T}_i)$,$i=1,2,3,4$都是拓扑空间。

设$(X, \mathscr{T})$为拓扑空间,A，V为X的子集.V称为A的邻

域（neighborhood），当且仅当有X的开集G，即 $G\in\mathscr{T}$，使$A\subset G\subset V$成立。

包含集A的开集G称为A的开邻域(open neighborhood)。特别地，当A为一点x时，称V为x的邻域。点x的邻域的全体称为x的邻域系（neighborhood system），记作$\mathscr{U}(x)$。

定理1 拓扑空间（$X,\mathscr{T}$）的子集G是开集，当且仅当若$x\in G$，则 $G\in\mathscr{U}(x)$。

证明 由定义必要性成立。

反之，对任意$x\in G$，因$G\in\mathscr{U}(x)$，故有x的开邻域U_x，使$x\in U_x\subset G$。因$G\subset\bigcup\limits_{x\in G}U_x\subset G$，故 $\bigcup\limits_{x\in G}U_x=G$，由开集公理，故$G\in\mathscr{T}$。

定理2 在拓扑空间（$X,\mathscr{T}$）中，对于任意点x，$\mathscr{U}(x)\neq\phi$，且下述邻域公理成立：

V_a。若$U\in\mathscr{U}(x)$，$U\subset V$，则$V\in\mathscr{U}(x)$；

V_b。若U_1，U_2，…，$U_n\in\mathscr{U}(x)$，则$\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\in\mathscr{U}(x)$；

V_c。若$U\in\mathscr{U}(x)$，则 $x\in U$；

V_d。若$V\in\mathscr{U}(x)$，则有$W\in\mathscr{U}(x)$。对 $y\in W$，必有$V\in\mathscr{U}(y)$。

证明 由定义a和c是显然的。

因$U_i\in\mathscr{U}(x)$，则由定义有$V_i\in\mathscr{T}$，使 $x\in V_i\subset U_i$。故$\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_i\in\mathscr{T}$，且$x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_i\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i$。$\therefore\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\in\mathscr{U}(x)$。故$b$成立。

若$V\in\mathscr{U}(x)$，则有$W\in\mathscr{T}$使$x\in W\subset V$，对$y\in W$恒有$y\in W\subset V$，故$V\in\mathscr{U}(y)$，即d成立。

（X，$\mathscr{U}(x)$）称为邻域空间(neighborhood space)，当且仅当集合X的任意元素x，对应X的非空子集族$\mathscr{U}(x)$，邻域系

公理成立。

在邻域空间中，X的元素x称为点，$\mathscr{U}(x)$ 称为点x的**邻域系**（neighborhood system）。属于$\mathscr{U}(x)$ 的X的子集V称为x的**邻域**（neighborhood）。

定理2指出拓扑空间是邻域空间。

设 $(X,\mathscr{U}(x))$ 为邻域空间，A为X的子集。x称为A的**内点**（interior point），当且仅当$x\in X$，$A\in\mathscr{U}(x)$。A的内点全体称为A的**内部**或**开核**（interior），记作A°。

定理3 设 $(X,\mathscr{U}(x))$ 为邻域空间，A为X的子集，$x\in X$。下述命题等价：

a. x为A的内点；

b. 有x的邻域V，使$V\subset A$。

证明 若x为A的内点，则$A\in\mathscr{U}(x)$。令$V=A$即可。反之，若有x的邻域V，使$V\subset A$，则由$V\in\mathscr{U}(x)$，$V\subset A$，有$A\in\mathscr{U}(x)$，故x为A的内点。

定理4 在邻域空间$(X,\mathscr{U}(x))$中，对于x的子集A，使A对应A的开核A°的算子，满足下述开核算子公理：

I_a. $X^\circ=X$；

I_b. $A^\circ\subset A$；

I_c. $A^{\circ\circ}=A^\circ$；

I_d. 若$A\subset X$，$B\subset X$，则$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$。

证明 I_a. 对于任意$x\in X$，因$\mathscr{U}(x)\neq 0$，故有$V\in\mathscr{U}(x)$。因$V\in\mathscr{U}(x)$，$V\subset X$，由V_a有$X\in\mathscr{U}(x)$，故$x\in X^\circ$。即若$x\in X$，则$x\in X^\circ$，故$X\subset X^\circ$。另方面，$X^\circ\subset X$，故$X^\circ=X$。

I_b. 若$x\in A^\circ$，则$A\in\mathscr{U}(x)$，由V_c知$x\in A$。故若$x\in A^\circ$，则$x\in A$，即$A^\circ\subset A$。

I_c. 若$x\in A^\circ$，则$A\in\mathscr{U}(x)$，由V_d，有$W\in\mathscr{U}(x)$，若$y\in W$，则$A\in\mathscr{U}(y)$。由定义$y\in A^\circ$。即若$y\in W$，则

$y\in A^\circ$成立，故 $W\subset A^\circ$。因$W\in\mathscr{U}(x)$，$W\subset A^\circ$，由V_a知$A^\circ\in\mathscr{U}(x)$。由定义有$x\in A^{\circ\circ}$。因若$x\in A^\circ$，则$x\in A^{\circ\circ}$，故$A^\circ\subset A^{\circ\circ}$。另方面，由$I_b$知$A^{\circ\circ}\subset A^\circ$，故$A^{\circ\circ}=A^\circ$。

I_d。由定义知，若 $A\subset B$，则$A^\circ\subset B^\circ$。因 $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$，故 $(A\cap B)^\circ\subset A^\circ$，$(A\cap B)^\circ\subset B^\circ$。于是$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$。反之，若 $x\in A^\circ\cap B^\circ$，由定义知$A\in\mathscr{U}(x)$ 且 $B\in\mathscr{U}(x)$，由V_b有$A\cap B\in\mathscr{U}(x)$，由定义$x\in(A\cap B)^\circ$。因若 $x\in A^\circ\cap B^\circ$，则 $x\in(A\cap B)^\circ$，故$A^\circ\cap B^\circ\subset(A\cap B)^\circ$。即 $(A\cap B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$，$A^\circ\cap B^\circ\subset(A\cap B)^\circ$成立，故$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$。

当集X的任意子集A对应X的子集 A° 的算子，满足开核算子公理时，称此对应为**开核算子**(interior operator)，而X称为**开核算子空间** (interior operator space)，记作$(X,\mathscr{D})$，或简记为X。

定理 4 指出邻域空间是开核算子空间。

由 I_d 的证明中可看出单调性成立，即若 $A\subset B$，则$A^\circ\subset B^\circ$。

设X为开核算子空间，A为X的子集。A称为 X 的**开集**(open set)，当且仅当 $A^\circ=A$。X的开集合的全体称为X的**开集系** (open set system)，记作$\mathscr{T}$。

定理5 开核算子空间X的开集系$\mathscr{T}$ 满足下述开集公理：

$\mathscr{T}_a$。ϕ，$X\in\mathscr{T}$；

$\mathscr{T}_b$。若$\{G_\alpha;\ \alpha\in D\}\subset\mathscr{T}$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in D}G_\alpha\in\mathscr{T}$；

$\mathscr{T}_c$。若$G_1,\cdots,G_n\in\mathscr{T}$，则$\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i\in\mathscr{T}$。

证明 $\mathscr{T}_a$。由I_a，$X^\circ=X$，由定义知$X\in\mathscr{T}$。由I_b，因$\phi^\circ\subset\phi$，故$\phi^\circ=\phi$，于是$\phi\in\mathscr{T}$。

$\mathscr{T}_b$。对于任意$x\in G=\bigcup\limits_{\alpha\in D}G_\alpha$，有 $\alpha\in D$，使 $x\in G_\alpha$。

因$G_a\in\mathscr{T}$，故$G_a^\circ=G_a$。由单调性，因$G_a\subset G$，故$G_a^\circ\subset G^\circ$。即对于任意$x\in G$，必有$x\in G^\circ$。故$G\subset G^\circ$。另方面，由I_b有$G^\circ\subset G$，故$G^\circ=G$。由定义知$G\in\mathscr{T}$。

$\mathscr{T}_c$。当$n=1$时不需证明。假设对于自然数n，$\mathscr{T}_c$成立。设$G_1, G_2, \cdots, G_{n+1}\in\mathscr{T}$，令$A=\bigcap_{i=1}^{n}G_i$，则$A$，$G_{n+1}\in\mathscr{T}$，由定义$A^\circ=A$，$G_{n+1}^\circ=G_{n+1}$，由$I_d$，$\left(\bigcap_{i=1}^{n+1}G_i\right)^\circ=(A\cap G_{n+1})^\circ=A\cap G_{n+1}^\circ=A\cap G_{n+1}=\bigcap_{i=1}^{n+1}G_i$，故$\bigcap_{i=1}^{n+1}G_i\in\mathscr{T}$。

由数学归纳法，$\mathscr{T}_c$对任意自然数n均成立。

定理5指出开核算子空间是拓扑空间。

定理6 在开核算子空间X中，集合A的内部A°是含于A中的最大开集。

证明 因$A^{\circ\circ}=A^\circ$，故A°为开集。由I_b，A°是含于A的开集。若G为含于A的开集，由单调性，$G^\circ\subset A^\circ$。因G为开集，故$G=G^\circ\subset A^\circ$。即A°是含于A的最大开集。

定理7 将邻域空间$(X, \mathscr{U}(x))$看作拓扑空间$(X,\mathscr{T})$时，x点的邻域系写做$\mathscr{V}(x)$。则对于任意$x\in X$，必有$\mathscr{U}(x)=\mathscr{V}(x)$。

证明 对任意$V\in\mathscr{U}(x)$，由定理6，在$(X, \mathscr{U}(x))$中V°是开集，$V^\circ\in\mathscr{T}$。由开核的定义有$x\in V^\circ\subset V$，故V为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中点x的邻域，而$\in\mathscr{V}(x)$。

反之，对于任意$V\in\mathscr{V}(x)$，由$(X,\mathscr{T})$的邻域系的定义，有$G\in\mathscr{T}$，使$x\in G\subset V$。在邻域空间中，$x\in G=G^\circ$，x为G的内点，故$G\in\mathscr{U}(x)$。因$G\subset V$，由V_c知$V\in\mathscr{U}(x)$。

定理8 将拓扑空间$(X,\mathscr{T})$看作邻域空间$(X, \mathscr{U}(x))$时，将开集系写作$\mathscr{T}'$，则$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$。

证明 对任意$G\in\mathscr{T}$，由邻域系的定义，若$x\in G$，则$G\in\mathscr{U}(x)$。由在邻域空间$(X, \mathscr{U}(x))$中开核G°的定义有$x\in G^{\circ}$。从而$G=G^{\circ}$。由邻域空间的开集定义知$G\in\mathscr{T}'$。反之，对任意$G\in\mathscr{T}'$，在邻域空间$(X, \mathscr{U}(x))$中，对于开集G，由定义$G=G^{\circ}$。由开核定义知若$x\in G$，则$G\in\mathscr{U}(x)$。由定理1有$G\in\mathscr{T}$。

定理7和定理8指出用邻域系或开集系定义拓扑空间是等价的。

定理9 将开核算子空间$(X, \mathscr{Q})$看作拓扑空间$(X, \mathscr{T})$时，X的任意子集A的内部A^{i}和原来的开核A°是一致的。

证明 设$\mathscr{U}(x)$为拓扑空间$(X, \mathscr{T})$定义的邻域系。对于任意$x\in A^{i}$（在拓扑$\mathscr{T}$下，A的内点集），由内点的定义有$A\in\mathscr{U}(x)$，由邻域的定义，有$G\in\mathscr{T}$使$x\in G\subset A$。由开核算子空间中开集的定义有$G^{\circ}=G$，根据开核的单调性，有$G^{\circ}\subset A^{\circ}$。故$x\in A^{\circ}$。

反之，对任意$x\in A^{\circ}$，由I_{c}和开集的定义，$A^{\circ}\in\mathscr{T}$。由邻域系的定义$A\in\mathscr{U}(x)$，由内部的定义，$x\in A^{i}$。

定理10 将拓扑空间$(X, \mathscr{T})$看作开核算子空间时，X的开集族$\mathscr{T}'$与原开集族$\mathscr{T}$一致。

证明 对任意$G\in\mathscr{T}'$有$G^{\circ}=G$，若$x\in G$，则$x\in G^{\circ}$，故由邻域的定义，有$G_{x}\in\mathscr{T}$，使$x\in G_{x}\subset G$。由$\mathscr{T}_{b}$，

$$G=\bigcup_{x\in G}G_{x}\in\mathscr{T}.$$

反之，若$G\in\mathscr{T}$，则由定理1知$G=G^{\circ}$，故$G\in\mathscr{T}'$。

定理9及定理10指出由开集系和开核算子定义的拓扑空间是等价的。于是由邻域系、开核算子、开集系定义拓扑空间均可。

定理3至定理10论证了用开集系、邻域系、开核算子等不同方法定义拓扑空间的等价性，初学者可以将这部份略去不读。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集A的点x称为A的内点(interior point)$\Longleftrightarrow A\in\mathscr{U}(x)$。

A的内点的全体称为A的内部或开核(interior)，记作A°。

定理3′　开核满足下述关系：

I_a　$X^\circ=X$；

I_b　$A^\circ\subset A$；

I_c　$A^{\circ\circ}=A^\circ$；

I_d　若$A\subset X$，$B\subset X$，则$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$。

证明：I_a　若$x\in X$，则$X\in\mathscr{U}(x)$，故$x\in X^\circ$。即$X\subset X^\circ$。反之显然有$X^\circ\subset X$，故$X^\circ=X$。

I_b　若$x\in A^\circ$，则$A\in\mathscr{U}(x)$，故$x\in A$。即$A^\circ\subset A$。

I_c　若$x\in A^\circ$，则$A\in\mathscr{U}(x)$。由V_d有$W\in\mathscr{U}(x)$使$x\in W\subset A$，对于$y\in W$，$A\in\mathscr{U}(y)$，$\therefore y\in A^\circ$。即$W\subset A^\circ$。因$W\in\mathscr{U}(x)$，由V_c，$A^\circ\in\mathscr{U}(x)$，即$x\in A^{\circ\circ}$，故$A^\circ\subset A^{\circ\circ}$。另一方面，由$I_b$，有$A^{\circ\circ}\subset A^\circ$，故$A^\circ=A^{\circ\circ}$。

I_d　由定义知，若$C_1\subset C_2$，则$C_1^\circ\subset C_2^\circ$。因$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$，故$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ$且$(A\cap B)^\circ\subset B^\circ$，即$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$。反之，若$x\in A^\circ\cap B^\circ$，则$A\in\mathscr{U}(x)$，$B\in\mathscr{U}(x)$。由$V_b$，$A\cap B\in\mathscr{U}(x)$，故$x\in(A\cap B)^\circ$，即$A^\circ\cap B^\circ\subset(A\cap B)^\circ$。

推论1　A°是开集。

实际上，这是定理1和I_c的结果。

推论2　A°是含于A的最大开集。

实际上，若V是A的开子集，$y\in V$，则$V\in\mathscr{U}(y)$，故$A\in\mathscr{U}(y)$。即$y\in A^\circ$，故$V\subset A^\circ$。

推论3　A是开集，当且仅当$A=A^\circ$。

【习　　题】

1．设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，试证下述命题等价：

a．X的所有子集是开集；

b．对于X的任意点x，含有x的所有子集V都是x的邻域；

c．对于X的任意点x，$\{x\}$是x的邻域。

2．设X是多于2点的集合，$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$为X上的拓扑，则$\mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$关于$X$未必是拓扑。

3．设$\mathscr{T}_\alpha(\alpha\in D)$是集合$X$上的一族拓扑，试证：$\bigcap\limits_{\alpha\in D}\mathscr{T}_\alpha$也是$X$上的拓扑。

4．设$X=\{a,b,c\}$，集族$\{\{a,b\},\{a,c\},X,\phi\}$不是关于$X$的拓扑，而集族$\{\{a,b\},\{a,c\},\{a\},X,\phi\}$是关于$X$的拓扑。

5．设(X,d)为伪度量空间，令$\rho(x,y)=\min[1,d(x,y)]$，则(X,ρ)是伪度量空间，它的拓扑和(X,d)的拓扑一致。

6．对于邻域空间X的子集A，下述各条件是等价的：

a．A是开集；

b．$A\subset A^\circ$；

c．若$x\in A$，则x为A的内点；

d．若$x\in A$，则A为x的邻域；

e．若$x\in A$，则有x的邻域V，使$x\in V\subset A$。

7．设$\mathscr{T}_\alpha(\alpha\in D)$是集合$X$上的一族拓扑，则有唯一的粗于每个$\mathscr{T}_\alpha$的极细拓扑，且有唯一的细于每个$\mathscr{T}_\alpha$的极粗拓扑。

8．设X为非空集，A为X的子集，令

$$\mathscr{T}(A)=\{\phi,G:A\subset G\subset X\}$$

则

a．$\mathscr{T}(A_1)>\mathscr{T}(A_2)\Longleftrightarrow A_1\subset A_2$。

b．若$\mathscr{T}(A_i)<\mathscr{T}$，$i=1,2,\cdots,n$，则$\mathscr{T}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)<\mathscr{T}$。

c．若$\mathscr{T}(A_\alpha)>\mathscr{T}$，$\alpha\in D$，则$\mathscr{T}\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)>\mathscr{T}$。

9．设$\mathfrak{M}$是无限基数，则X的子集族

$\{G:G=\phi$，或$\mathscr{C}G$的基数$\leqslant\mathfrak{M}\}$

构成拓扑。

§2　闭集、边界
(closed set、boundary)

在不作特别声明时，集合X经常表示基本空间。X的子集A在X的补集简称为A的补集，记作$\mathscr{C}A$。关于X的子集族$\{A_\alpha;\alpha\in D\}$，de Morgan 公式

$$\mathscr{C}(\bigcup A_\alpha)=\bigcap\mathscr{C}A_\alpha,\quad\mathscr{C}(\bigcap A_\alpha)=\bigcup\mathscr{C}A_\alpha$$

经常要用到。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集A称为闭集（closed set），当且仅当$\mathscr{C}A\in\mathscr{T}$。

X的闭集全体称为X的闭集系（closed set system），记作$\mathscr{F}$，即

$$\mathscr{F}=\{F:\mathscr{C}F\in\mathscr{T}\}.$$

由开集公理及 de Morgan 公式直接推得下述定理。

定理1　拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的闭集系$\mathscr{F}$满足下述闭集公理：

F_a．$X\in\mathscr{F}$，$\phi\in\mathscr{F}$；

F_b．若$\{F_\alpha;\alpha\in D\}\subset\mathscr{F}$，则$\bigcap_{\alpha\in D}F_\alpha\in\mathscr{F}$；

F_c．对于$\mathscr{F}$的有限个成分$F_1,F_2,\cdots,F_n$，必有$\bigcup_{i=1}^{n}F_i\in\mathscr{F}$。

由开集和闭集的互补关系，立即看出$\mathscr{F}$和$\mathscr{T}$有关系：

$$\mathscr{T}=\{G:\mathscr{C}G\in\mathscr{F}\}.$$

由 de Morgan 公式及$\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$直接推得下述定理。

定理 2　若在集合 X 中给予闭集系 $\mathscr{F}$，满足闭集公理。则 $\mathscr{T}=\{G: \mathscr{C}G\in\mathscr{F}\}$ 满足开集公理，拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集系恰是 $\mathscr{F}$.

由此可见由开集系或闭集系定义的拓扑空间是等价的。

点 x 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的子集 A 的**接触点** (cluster point)，当且仅当对任意 $U\in\mathscr{U}(x)$，恒有 $U\cap A\neq\phi$. A 的接触点集称为 A 的**闭包** (closure)，记作 $\overline{A}$.

点 x 是 A 的**聚点** (accumulation point)，当且仅当 x 是 $A\setminus\{x\}$ 的接触点。A 的聚点集称为 A 的**导集** (derived set)，记作 A^d。A 称为**完全集** (complete set)，当且仅当 $A=A^d$。

定理 3　对于拓扑空间 X 的子集 A，有

$$\overline{A}=\mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ,\quad A^\circ=\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}A}).$$

证明　因

$$\overline{A}=\{x\in X: \text{对所有} V\in\mathscr{U}(X),\ \text{有} V\cap A\neq\phi\},$$

故

$$\begin{aligned}\mathscr{C}\overline{A}&=\{x\in X: \text{对某个} V\in\mathscr{U}(x),\ \text{使} V\cap A=\phi\}.\\&=\{x\in X: \text{对某个} V\in\mathscr{U}(x),\ \text{使} V\subset\mathscr{C}A\}.\\&=\{x\in X: \mathscr{C}A\in\mathscr{U}(x)\}\\&=(\mathscr{C}A)^\circ.\end{aligned}$$

于是有　$\overline{A}=\mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ$

在上式中以 $\mathscr{C}A$ 代替 A，得到 $A^\circ=\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}A})$。

由定理 3 和开核算子公理（§ 1 定理 4）直接可以推得下述定理。

定理 4　使拓扑空间 X 的子集 A 对应其闭包 $\overline{A}$ 的算子，满足下述闭包算子公理（Kuratowski公理）。

A_a.　$\overline{\phi}=\phi$;

A_b.　$\overline{A}\supset A$;

A_c.　$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

A_d.　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证明 A_a：$\overline{\phi} = \mathscr{C}(\mathscr{C}\phi)^\circ = \mathscr{C}X^\circ = \mathscr{C}X = \phi$，

A_b：$\overline{A} = \mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ \supset \mathscr{C}(\mathscr{C}A) = A$，

A_c：$\overline{\overline{A}} = \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A)^\circ} = \mathscr{C}[\mathscr{C}[\mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ]]^\circ$

$= \mathscr{C}[(\mathscr{C}A)^\circ]^\circ = \mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ = \overline{A}$。

A_d：$\overline{A \cup B} = \mathscr{C}[\mathscr{C}(A \cup B)]^\circ = \mathscr{C}[\mathscr{C}A \cap \mathscr{C}B]^\circ$

$= \mathscr{C}[(\mathscr{C}A)^\circ \cap (\mathscr{C}B)^\circ] = \mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ \cup \mathscr{C}(\mathscr{C}B)^\circ$

$= \overline{A} \cup \overline{B}$。

定理5 A是拓扑空间X的闭子集，当且仅当$\overline{A} = A$。

证明 A是闭集$\Longleftrightarrow \mathscr{C}A$ 是开集$\Longleftrightarrow \mathscr{C}A = (\mathscr{C}A)^\circ \Longleftrightarrow A = \mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ = \overline{A}$。

定理6 拓扑空间X的子集A的闭包$\overline{A}$是含A的最小闭集。

证明 由A_c及定理5知$\overline{A}$是闭集。由A_b知$\overline{A}$是含A的闭集。设F是含A的闭集，即$F \supset A$，则$\overline{F} \supset \overline{A}$。因$F = \overline{F}$，故$F \supset \overline{A}$。即$\overline{A}$是含$A$的最小闭集。

当集合X的任意子集A对应X的子集$\overline{A}$的算子，满足闭包算子公理时，称此算子为**闭包算子** (closure operator)，而称X为**闭包算子空间** (closure operator space)，记作 $(X, \mathscr{A})$。

定理7 在闭包算子空间 $(X, \mathscr{A})$ 中，令

$$A^\circ = \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A)},$$

则A对应A°确定的对应满足开核算子公理。

证明 I_a $X^\circ = \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}X)} = \mathscr{C}\overline{\phi} = \mathscr{C}\phi = X$，

I_b $A^\circ = \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A)} \subset \mathscr{C}(\mathscr{C}A) = A$，

I_c $A^{\circ\circ} = [\mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A)}]^\circ = \mathscr{C}\overline{[\mathscr{C}(\mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A)})]} = \mathscr{C}\overline{\overline{(\mathscr{C}A)}}$

$= \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A)} = A^\circ$。

I_d $(A \cap B)^\circ = \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}(A \cap B))} = \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A \cup \mathscr{C}B)} =$

$\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}A} \cup \overline{\mathscr{C}B}) = \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}A)} \cap \mathscr{C}\overline{(\mathscr{C}B)} = A^\circ \cap B^\circ$。

定理4及定理7指出开核算子空间与闭包算子空间是等价的。综上所述可得出下述结果。

定理8 用邻域系、开集系、闭集系、开核算子、闭包算子等定义的拓扑空间全是等价的。

子是由一个公理出发，其它公理都可以作为性质推出。后面我们谈到拓扑空间，表示满足这些公理中的任何一个。

设A为拓扑空间X的子集。点x是A的外点（exterior point），当且仅当x是$\mathscr{C}A$的内点。A的外点的集合称为A的外部（exterior），记作A^e。即$A^e=(\mathscr{C}A)^\circ$。

点x是集A的边界点（boundary point），当且仅当$x\notin A^e$且$x\notin A^\circ$。A的边界点的集合称为A的边界（boundary），记作∂A。

由边界的定义可直接推得下述性质：

a．$A^\circ\cap\partial A=A^e\cap\partial A=\phi$。

b．$X=A^\circ+A^e+\partial A$。

实际上，由边界的定义有 $X=A^\circ\cup A^e\cup\partial A$。又因

$A^\circ\subset A$，$A^e\subset\mathscr{C}A$，故$A^\circ\cap A^e=\phi$。再由性质a得到$X=A^\circ+A^e+\partial A$。

c．$\overline{A}=A^\circ\cup\partial A$。

实际上，$\overline{A}=\mathscr{C}(\mathscr{C}A)^\circ=\mathscr{C}A^e=A^\circ\cup\partial A$。

d．A是闭集，当且仅当 $\partial A\subset A$。

实际上，A是闭集$\Longleftrightarrow A=\overline{A}\Longleftrightarrow A=A^\circ\cup\partial A\Longleftrightarrow A\supset\partial A$。

e．A是开集，当且仅当 $A\cap\partial A=\phi$。

实际上，A是开集$\Longleftrightarrow A=A^\circ\Longleftrightarrow A\cap\partial A=\phi$。

设集合A为拓扑空间X的子集，A在X中稠密（dense），当且仅当$\overline{A}=X$。若B也是X的子集，则A在B中稠密，当且仅当$\overline{A}\supset B$。

A在X中是缘集（border set），当且仅当$A^\circ=\phi$；A在X中是无处稠密的（nowhere dense），当且仅当$(\overline{A})^\circ=\phi$。

例1　在实数空间R中，设Q为有理数集，S为无理数

集，Z 为自然数集。按通常拓扑，对任意 $x\in R$ 及任意正数 ε，必有 $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\cap Q\neq\phi$。故 $\overline{Q}=R$。同理 $\overline{S}=R$，即 Q 和 S 都在 R 中稠密。也容易看出 Q 和 S 都是 R 的缘集。而 $(\overline{Z})^{\circ}=\phi$，故 Z 在 R 中无处稠密。

拓扑空间 X 称为**可分空间**（separable space），当且仅当 X 有可数稠子集。

设 A 为拓扑空间 X 的子集，$x\in A$。x 称为 A 的**孤立点**（isolated point），当且仅当有 $V\in\mathscr{U}(x)$，使 $V\cap A=\{x\}$。显然，X 的任意点是 X 的孤立点，当且仅当 X 是离散空间。

X 的子集 E 称为**第一类集**(first category set)，当且仅当 E 是至多可数个无处稠密集的并集。不是第一类的集称为**第二类集**（second category set）。

显然第一类集的子集是第一类集，至多可数个第一类集的并集也是第一类集。

拓扑空间 X 是 **Baire 空间**（Baire space），当且仅当若 X 的子集 E 是第一类集，则 $\mathscr{C}E$ 在 X 中稠密。

定理 9 对于拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）下述诸条件等价。

a．X 是 Baire 空间；

b．X 的非空开集是第二类集；

c．对于 X 的闭集 $A_1,\ A_2,\cdots$，若 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 具有内点，则最少有一个 A_n 具有内点；

d．若 X 的开集 $G_1,\ G_2,\ \cdots$，都在 X 中稠密，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 在 X 中也稠密。

证明 a $\Rightarrow$ b，在 Baire 空间（X，$\mathscr{T}$）中，若开集 $G(\neq\phi)$ 为第一类集，则 $\mathscr{C}G$ 在 X 中稠密，即 $\overline{\mathscr{C}G}=\mathscr{C}G=X$。这是矛盾。

b $\Rightarrow$ c，设 $A_1,\ A_2,\cdots$ 是 X 的闭集列，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$。若 A_n°

$=\phi\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，而有非空开集$G$，使$E\supset G$，则因$E$为第一类集，$G$也是第一类集，与条件b矛盾。

c$\Rightarrow$a 对于第一类集$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，$(\overline{E_n})^\circ=\phi$，若$\overline{\mathscr{C}E}\neq X$，即$\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}E})=G\neq\phi$。则对于$A_n=\overline{E_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\supset G$，与假定矛盾。

故a，b，c等价。

设$A_n=\mathscr{C}G_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，则c与d等价。

实际上，若$\overline{G_n}=X$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，则$\mathscr{C}G_n$不含内点，由条件c知$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n$不含内点。而$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n=\mathscr{C}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，故$\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n}=X$。

反之，若 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$含有内点，则$\mathscr{C}E=\mathscr{C}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$不在$X$中稠密。由条件d知必有$G_K$，使$\overline{G_K}\neq X$，故$A_K=\mathscr{C}G_K$含有内点。

【习　　题】

1．拓扑空间X的子集A是闭集，当且仅当$A\supset A^d$。

2．$\overline{A}=A\cup A^d=A\cup\partial A$。

3．$A^\circ=A\backslash(\mathscr{C}A)^d=A\backslash\partial A$。

4．$\overline{\mathscr{C}A}=\mathscr{C}A^\circ$。

5．$x\in\partial A$，当且仅当对任意$U\in\mathscr{U}(x)$，必有$U\cap A\neq\phi$，且$U\cap\mathscr{C}A\neq\phi$。

6．$\partial A=\overline{A}\cap\overline{(\mathscr{C}A)}=\overline{A}\backslash A^\circ$。

7．$\mathscr{C}(\partial A)=A^\circ\cup(\mathscr{C}A)^\circ$。

8. 设A为拓扑空间X的子集，用取闭包和取补集的方法由A开始，最多可以做出14个不相同的集合。在实数空间中试举一例，恰有14个不相同集。

9. 设A是拓扑空间X的稠子集，U是开集，试证

$U\subset\overline{(A\cap U)}$。

10. 设A是拓扑空间X的子集，G是X的开子集，下述条件等价：

a. A在X中稠密；

b. 对任意G，有$\overline{G}\cap\overline{A}=G$；

c. 对任意G，有$G\cap A\neq\phi$。

11. 试证：$\overline{\bigcap A_\alpha}\subseteq\bigcap\overline{A_\alpha}$，$\overline{\bigcup A_\alpha}\supseteq\bigcup\overline{A_\alpha}$。

12. 举例说明导集未必是闭集。

13. 若A在B中稠密，且C是开集，则$A\cap C$在$B\cap C$中稠密。

14. 若A是X的稠子集，B在A中稠密，则B是X的稠子集。

15. 稠密开集与稠子集的交是稠子集。

16. 闭包算子公理与下述二条件等价（Monteiro）：

a. $\overline{\phi}=\phi$；

b. $\overline{\overline{X}}\cup\overline{Y}\cup Y=\overline{X\cup Y}$。

17. 有限个无处稠密集的并集是无处稠密的。

18. 若A，B是开集，则A的边界在B中是无处稠密的。

19. 可分空间中两两不相交的开集族，至多是可数的，其逆不成立。

20. 设$\overline{A}$为伪度量空间X的子集A的闭包，B为和A的距离是0的所有点的集合，则$\overline{A}=B$。

21. Baire空间的开集仍为Baire空间。

22. 完备度量空间作为拓扑空间是Baire空间。

23. 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$上定义的实值连续函数列$\{f_n(x)\}$，

若点态收敛于$f(x)$，则 $f(x)$ 的不连续点集是X的第一类集。

24．试证：$(A\cup B)^{d}=A^{d}\cup B^{d}$.

25．举例指出：有集族$\{A_{\alpha}:\alpha\in D\}$使

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in D}A_{\alpha}}\neq\bigcup_{\alpha\in D}\overline{A_{\alpha}}.$$

26．设$A\subset X$，$B\subset X$，必有

$\overline{A}\cap B^{c}=\overline{A\cap B}\cap B^{c}$.

27．G是X的开子集，当且仅当对任意集A，若$A\cap G=\phi$，则$\overline{A}\cap G=\phi$。

28．若$A\cup B=X$，则$\overline{A}\cup B^{c}=X$；

若$A\cap B=\phi$，则$\overline{A}\cap B^{c}=\phi$。

§3 连续映射

(continuous mapping)

设$(X,\mathscr{T})$，$(Y,\mathscr{U})$是拓扑空间，映射$f:X\to Y$。设$x\in X$，f称为在x点连续（continuous），当且仅当对于$V\in\mathscr{U}(f(x))$，有$U\in\mathscr{U}(x)$，使$f(U)\subset V$成立。f称为X上连续映射（continuous mapping），当且仅当f在X的每点上连续。与度量空间的情形有同样结果。

定理1　$f:X\to Y$下列各条件是等价的：

a．f是连续的；

b．对任意$x\in X$，若$V\in\mathscr{U}(f(x))$，则$f^{-1}(V)\in\mathscr{U}(x)$；

c．若$A\subset X$，则$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$；

d．若$B\subset Y$，则$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$；

e．对于Y的任意闭子集F，$f^{-1}(F)$是X的闭子集；

f．对于Y的任意开子集G，$f^{-1}(G)$是X的开子集。

证明　a⇒b　若$V\in\mathscr{U}(f(x))$，则有$U\in\mathscr{U}(x)$，使$f(U)\subset V$。即$U\subset f^{-1}(V)$，故$f^{-1}(V)\in\mathscr{U}(x)$。

b ⇒ c 对任意$V \in \mathscr{U}(f(x))$，由条件b，有$f^{-1}(V) \in \mathscr{U}(x)$，若$x \in \overline{A}$。则$f^{-1}(V) \cap A \neq \phi$。设 $y \in f^{-1}(V) \cap A$，因 $f(y) \in V \cap f(A)$，故$V \cap f(A) \neq \phi$。于是$f(x) \in \overline{f(A)}$。即 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$。

c ⇒ d 设$A = f^{-1}(B)$，则$f(A) \subset B$，由条件c有$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B}$。故$\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{B})$。即$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$。

d ⇒ e 若B是Y的闭子集，则$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$，故 $f^{-1}(B)$ 是X的闭集。

e ⇒ f 由$\mathscr{C}f^{-1}(G) = f^{-1}(\mathscr{C}G)$和闭集的定义直接得出。

f ⇒ g 若$V \in \mathscr{U}(f(x))$，则$f(x) \in V$，且有开集G，使$f(x) \in G \subset V$。因$f^{-1}(G)$为开集，$f(x) \in G$，故$x \in f^{-1}(G)$，$f^{-1}(G) \in \mathscr{U}(x)$，令$f^{-1}(G) = U$，则 $f(U) \subset G \subset V$。

设 $f: X \to Y$。若X为离散空间，Y为任意拓扑空间，则f为连续映射。若Y为密集空间，X为任意拓扑空间，f亦必为连续映射。若f为常值映射，不论X、Y为任何空间，f亦必为连续映射。

设$(X, \mathscr{T}_1)$，$(X, \mathscr{T}_2)$为拓扑空间，$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$为同一集合X上的两个拓扑。当$\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$时，恒等映射$I: (X, \mathscr{T}_2) \to (X, \mathscr{T}_1)$亦为连续映射。

定理2 设$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$。若f在点$x \in X$连续，g在点$f(x)$连续，则复合映射 $g \circ f$ 在点x也连续。

证明 因g在点$f(x)$连续，故对于任意$W \in \mathscr{U}[g(f(x))]$，$g^{-1}(W) \in \mathscr{U}(f(x))$。因$f$在点$x$连续，故 $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}[g^{-1}(W)] \in \mathscr{U}(x)$。即$g \circ f$在点$x$是连续的。

推论 若 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 都是连续映射，则 $h = g \circ f$ 是X到Z的连续映射。

设$(X, \mathscr{T}_1)$，$(Y, \mathscr{T}_2)$为拓扑空间，$f: X \to Y$。f是开映射(open mapping)，当且仅当对任意$G \in \mathscr{T}_1$，必有$f(G) \in \mathscr{T}_2$。f是闭映射 (closed mapping)，当且仅当对任意$F \in \mathscr{F}_1$，必有

$f(F)\in\mathscr{F}_2$。

显然，连续映射未必是开映射或闭映射。

设 X，Y 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 为双射。f 是 X 到 Y 的同胚映射（homeomorphism mapping）或拓扑映射，当且仅当 f，f^{-1} 都是连续映射。亦称为**双连续映射**（bicontinuous mapping）。

等价的，f 是同胚映射，当且仅当 f 是双射且连续开映射或 f 是双射且连续闭映射。

拓扑空间 X，Y 间存在同胚映射时，称 X，Y 为同胚（homeomorphism）的。

拓扑学的对象是研究在同胚映射下不变的性质。

定理3 同胚关系是等价关系。即它满足自反、对称、可迁诸律。

证明 因恒等映射是同胚映射，故自反律成立。若 $f:X\to Y$ 是同胚映射，则 $f^{-1}:Y\to X$ 也是同胚映射，故对称律成立。若 f，g 是同胚映射，则 f，f^{-1}，g，g^{-1} 都是连续映射，$g\circ f$，$f^{-1}\circ g^{-1}$ 也都是连续映射。故 $g\circ f$ 及 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 都是连续映射，即 $g\circ f$ 是同胚映射。可迁律成立。

定理4 在同一集合 X 上赋予两个拓扑，$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$，下述命题是等价的：

a．$\mathscr{T}_1$ 比 $\mathscr{T}_2$ 强；

b．恒等映射 $I:(X,\mathscr{T}_1)\to(X,\mathscr{T}_2)$ 是连续的；

c．对任意 $x\in X$，有 $\mathscr{U}_{\mathscr{T}_2}(x)\subset\mathscr{U}_{\mathscr{T}_1}(x)$；

d．$\mathscr{T}_2\subset\mathscr{T}_1$；

e．$\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}_1$；

f．$A\subset X$，$A^{\circ}_{\mathscr{T}_2}\subset A^{\circ}_{\mathscr{T}_1}$；

g．$A\subset X$，$\overline{A}_{\mathscr{T}_1}\subset\overline{A}_{\mathscr{T}_2}$。

证明 由定义可知 a 和 d 等价。由定理1知 b，c，d，e，g 是等价的。由§2定理3知 f 和 g 是等价的。

在更一般的空间中，找出一对一连续映射是拓扑映射的条件是一个很有趣的问题，请参看 E.Duda 1971年的结果。

【习　　题】

1．设$C(X)$ 表示拓扑空间 X 上定义的实值连续函数的全体，f，$g\in C(X)$，r，s 为实数，则

a．$r\cdot f+s\cdot g\in C(X)$；

b．$\min(f,g)\in C(X)$；

c．$\max(f,g)\in C(X)$；

d．$f\circ g\in C(X)$；

e．若当 $x\in X$ 时，$g(x)\neq 0$，则 $f/g\in C(X)$。

2．举例指出：

a．连续映射未必是闭映射；

b．开映射未必是连续映射．

3．$f:X\to Y$ 是连续闭映射，当且仅当对于任意 $E\subset X$，恒有 $f(\overline{E})=\overline{f(E)}$。

4．设 A、B 为拓扑空间X的子集，使 $A\cup B=X$，$\overline{(A\backslash B)}\cap(B\backslash A)=\phi$，$(A\backslash B)\cap\overline{(B\backslash A)}=\phi$．若 f 是X上的函数，在A上和在B上分别是连续的，则 f 在X上也是连续的。

5．设 $f:(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$是双射，则下述诸条件等价：

a．f 是同胚映射；

b．对于任意 $E\subset X$，恒有 $\overline{f(E)}=f(\overline{E})$；

c．对于任意 $E\subset X$，恒有$[f(E)]^\circ=f(E^\circ)$；

d．$f(\mathscr{T})=\mathscr{U}$；即$X$中开集的象集恰是$Y$中开集的全体；

e．$f(\mathscr{F})=\mathscr{C}(\mathscr{U})$，即$X$中闭集的象集恰是$Y$中闭集的全体；

6．设 f，g 为拓扑空间X上实值连续函数，A为X 的稠子

集，若在A上恒有$f(x)\leqslant g(x)$，则在X上亦必有$f(x)\leqslant g(x)$。

7. 举例指出拓扑空间X到拓扑空间Y上的一对一连续映射未必是同胚映射。

8. 设$\mathscr{S}$为集合X上赋与的拓扑的集合。则$\mathscr{S}$按拓扑的序关系构成完备格(complete lattice)。即对于任意一族拓扑的集合$\{\mathscr{T}_\lambda: \lambda\in D\}$，在$\mathscr{S}$中恒有

$$\mathscr{T}_1=\inf\{\mathscr{T}_\lambda: \lambda\in D\},\quad \mathscr{T}_2=\sup\{\mathscr{T}_\lambda: \lambda\in D\}$$

存在。

9. 设A为伪度量空间E的固定子集，则从点x到集A的距离关于伪距离拓扑是x的连续函数。

10. 设f是所有非负实数集上定义的连续实值函数，使$f(x)=0$当且仅当$x=0$，f是非减函数，且对所有非负数x，y有$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$。

若(X,d)是度量空间，$\rho(x,y)=f(d(x,y))$，则(X,ρ)也是度量空间，且空间(X,ρ)的距离拓扑和(X,d)的距离拓扑一致。

§4 基、邻域基

(base、base for the neighborhood system)

关于实数集确定通常拓扑时，常开始于开区间系，并由此生成拓扑。这种方法在一般考虑中经常用到。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的开集族$\mathscr{B}$称为X的拓扑$\mathscr{T}$的基或拓扑基(topological base)或开基(open base)，当且仅当X的任意非空开集均可表为$\mathscr{B}$的成分的并。

实数空间中开区间系构成关于通常拓扑的一个开基。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的点x的一族邻域$\mathscr{B}(x)$称为点x的邻域基(base for the neighborhood system of a point x)或点x的局部基(local base at x)或基本邻域系(fundamental system of neighborhoods)，当且仅当点x的任意邻域都含有属于$\mathscr{B}(x)$的

集合.

定理1 设$\mathscr{B}$为拓扑空间X的开基，$V\subset X$是X的点x的邻域，当且仅当有$B\in\mathscr{B}$，使$x\in B\subset V$成立.

证明 若V是x的邻域，则有开集U，使$x\in U\subset V$. 由开基的定义,U为$\mathscr{B}$的成分的并. 故有$B\in\mathscr{B}$，使$x\in B\subset U\subset V$.

反之，若有$B\in\mathscr{B}$，使$x\in B\subset V$，则V显然是x的邻域.

定理2 设$\mathscr{B}$为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的一族开集,$\mathscr{B}$是X的开基，当且仅当对于X的任意点x，

$$\mathscr{B}(x)=\{B\in\mathscr{B}: x\in B\}$$

是x的邻域基.

证明 若$\mathscr{B}$是X的开基,则由定理1 $\mathscr{B}(x)$是x的邻域基. 反之，对于X的任意开集G，若$x\in G$，有$B_x\in\mathscr{B}(x)$，使$x\in B_x\subset G$. 则因$G=\bigcup_{x\in G}B_x$，故$\mathscr{B}$是$(X,\mathscr{T})$的开基.

例1 集合X上的拓扑$\mathscr{T}$是密集拓扑，当且仅当$\{X\}$构成开基、或对于任意点$x\in X$，$\{X\}$是x的邻域基.

例2 集合X上的拓扑$\mathscr{T}$是离散拓扑,当且仅当对于X的任意点x，仅由x组成的集合$\{x\}$是x的邻域基. 或$\{\{x\}: x\in X\}$是X的开基.

例3 度量空间(E, d)中，对于E的任意点x，$\{B(x,\frac{1}{n}): n\in N\}$是点$x$的邻域基. 而$\{B(x,\frac{1}{n}): x\in X, n\in N\}$构成X的开基.

定理3 集族$\mathscr{B}$是关于集$X=\bigcup\{B: B\in\mathscr{B}\}$的某拓扑基，当且仅当对$\mathscr{B}$的每二成分$U$和$V$，及每点$x\in U\cap V$，有$W\in\mathscr{B}$，使$x\in W$且$W\subset U\cap V$.

证明 若$\mathscr{B}$是X的拓扑基,$U,V\in\mathscr{B}$, $x\in U\cap V$. 则因$U\cap V$是开集，在$\mathscr{B}$中有含x的成分是$U\cap V$的子集.

反之，设$\mathscr{B}$是满足条件的集族，$\mathscr{T}$是$\mathscr{B}$的成分的所有并的族．即

$$\mathscr{T}=\{G:G=\bigcup_{a\in D}B_a,\ B_a\in\mathscr{B},\ D\text{是任意指标集}\}$$

$\mathscr{T}$的成分的并本身是$\mathscr{B}$的成分的并，仍为$\mathscr{T}$的成分．仅需指出$\mathscr{T}$的二成分U和V的交是$\mathscr{T}$的成分．

若$x\in U\cap V$，则可以在$\mathscr{B}$中选取B和C，使$x\in B\subset U$及$x\in C\subset V$，于是有$W\in\mathscr{B}$使$x\in W\subset B\cap C\subset U\cap V$．因此，$U\cap V$是$\mathscr{B}$的成分的并，故$\mathscr{T}$是拓扑，而$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的基．

定理 4 设$\mathscr{S}$为任意非空集族，则$\mathscr{S}$的成分的所有有限交的族是集$X=\bigcup\{S:S\in\mathscr{S}\}$的拓扑基．

证明 设$\mathscr{S}$是集族，$\mathscr{B}$是$\mathscr{S}$的成分的所有有限交的族，则$\mathscr{B}$的二成分的交仍是$\mathscr{B}$的成分，由定理 3，$\mathscr{B}$是关于拓扑的基．

集族$\mathscr{S}$是关于拓扑$\mathscr{T}$的子基（subbase），当且仅当$\mathscr{S}$的成分的有限交全体构成$\mathscr{T}$的基．等价的，$\mathscr{T}$的每个成分是$\mathscr{S}$的成分的有限交的并．

由上述定理，每个非空族$\mathscr{S}$是关于某个拓扑的子基，而这个拓扑是由$\mathscr{S}$唯一确定的．它是含$\mathscr{S}$的最小拓扑．

定理 5 设X，Y为拓扑空间，$f:X\to Y$为映射，$\mathscr{B}(x)$为X的点x的邻域基，$\mathscr{B}_1(f(x))$为$f(x)$的邻域基，则f在点x是连续的，当且仅当对任意$C\in\mathscr{B}_1(f(x))$，有$B\in\mathscr{B}(x)$，使

$$f(B)\subset C$$

成立．

证明 由f在点x的连续性，对任意$C\in\mathscr{U}(f(x))$，有$V\in\mathscr{U}(x)$，使$f(V)\subset C$．因$\mathscr{B}(x)$是点x的邻域基，故有$B\in\mathscr{B}(x)$，使$B\subset V$．于是$f(B)\subset C$成立．

反之，若$V\in\mathscr{U}(f(x))$，因$\mathscr{B}_1(f(x))$是$f(x)$的邻域基，故有$C\in\mathscr{B}_1(f(x))$，使$C\subset V$．由假定，有$B\in\mathscr{B}(x)$使$f(B)$

$\subset C$. 因 $B\in\mathscr{U}(x)$，故 f 在 x 点连续.

定理6 在集合 X 上赋予拓扑 $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$. 对于 X 的任意点 x，设 $\mathscr{B}_1(x)$，$\mathscr{B}_2(x)$ 分别为点 x 在 $(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_2)$ 上的邻域基. 则 $\mathscr{T}_1>\mathscr{T}_2$，当且仅当在 X 的任意点 x，对于任意 $B_2\in\mathscr{B}_2(x)$ 有 $B_1\in\mathscr{B}_1(x)$，使 $B_1\subset B_2$ 成立.

证明 由§3定理4，$\mathscr{T}_1>\mathscr{T}_2\Longleftrightarrow I:(X,\mathscr{T}_1)\to(X,\mathscr{T}_2)$ 是连续的. 由连续性定理，$\mathscr{T}_1>\mathscr{T}_2\Longleftrightarrow$ 对任意 $B_2\in\mathscr{B}_2(x)$，有 $B_1\in\mathscr{B}_1(x)$，使 $B_1\subset B_2$ 成立.

推论 在集合 X 上赋予拓扑 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$，对于 X 的任意点 x，$\mathscr{B}_1(x)$，$\mathscr{B}_2(x)$ 分别为点 x 在拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_2)$ 上的邻域基. $\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$，当且仅当在 X 的任意点 x，对于任意 $B_2\in\mathscr{B}_2(x)$ 有 $B_1\in\mathscr{B}_1(x)$ 使 $B_1\subset B_2$ 成立. 反之，对于任意的 $B_1\in\mathscr{B}_1(x)$ 有 $B_2\in\mathscr{B}_2(x)$，使 $B_2\subset B_1$ 成立.

定理7 对于集合 X 的任意元 x 给予 X 的子集族 $\mathscr{B}(x)$，在 X 上存在拓扑 $\mathscr{T}$，使 $\mathscr{B}(x)$ 是 x 的邻域基，当且仅当下述邻域基公理成立：

B_a. 对于有限个 $B_1,B_2,\cdots,B_n\in\mathscr{B}(x)$，有 $B\in\mathscr{B}(x)$，使

$$B\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i;$$

B_b. 若 $B\in\mathscr{B}(x)$，则 $x\in B$；

B_c. 若 $V\in\mathscr{B}(x)$，则有 $W\in\mathscr{B}(x)$ 使 $W\subset V$. 且对任意 $y\in W$，有 $B\in\mathscr{B}(y)$ 使 $B\subset V$.

证明 在 X 上若有拓扑 $\mathscr{T}$ 使 $\mathscr{B}(x)$ 是 x 的邻域基，则由定义和公理 V_a，在 X 的点 x 的邻域系 $\mathscr{U}(x)$ 为

$$\mathscr{U}(x)=\{V\subset X:\ 有\ B\in\mathscr{B}(x)\ 使\ B\subset V\}.$$

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n\in\mathscr{B}(x)$，则 $\bigcap_{i=1}^{n}B_i\in\mathscr{U}(x)$，于是有 $B\in\mathscr{B}(x)$，使 $B\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i$. 又若 $B\in\mathscr{B}(x)$，则 $B\in\mathscr{U}(x)$，于是 $x\in B$.

若$V\in\mathscr{B}(x)$，则$V\in\mathscr{U}(x)$·由公理V_d有$U\in\mathscr{U}(x)$，若$y\in U$，则 $V\in\mathscr{U}(y)$.有$W\in\mathscr{B}(x)$使$W\subset U$.对于$y\in W$，因$V\in\mathscr{U}(y)$，故有$B\in\mathscr{B}(y)$，使$B\subset V$。即邻域基公理成立。

反之，若对每点$x\in X$，有满足邻域基公理的集族$\mathscr{B}(x)$，则由

$$\mathscr{U}(x)=\{V\subset X: 有\ B\in\mathscr{B}(x)\ 使 B\subset V\}$$

定义$\mathscr{U}(x)$，今证明$\mathscr{U}(x)$满足邻域系公理。

V_a. 由$\mathscr{U}(x)$的做法推得。

V_b. 对有限个$V_1, V_2, \cdots, V_n\in\mathscr{U}(x)$，有 $B_i\in\mathscr{B}(x)$使$B_i\subset V_i$，由公理B_a有$B\in\mathscr{B}(x)$使$B\subset\bigcap_{i=1}^{n}B_i\subset\bigcap_{i=1}^{n}V_i$，由$\mathscr{U}(x)$的做法，$\bigcap_{i=1}^{n}V_i\in\mathscr{U}(x)$。

V_c. 若$V\in\mathscr{U}(x)$，则有$B\in\mathscr{B}(x)$使$B\subset V$，由公理B_b，$x\in V$。

V_d. 若$V\in\mathscr{U}(x)$，则有$B\in\mathscr{B}(x)$使$B\subset V$.由公理B_c，有$W\in\mathscr{B}(x)$ 使$W\subset B$，对于$y\in W$有$B_y\in\mathscr{B}(y)$使$B_y\subset B\subset V$。这时由$\mathscr{U}(x)$的做法，有$V\in\mathscr{U}(y)$。

于是$\mathscr{U}(x)$满足邻域系公理，由$\mathscr{U}(x)$可确定拓扑$\mathscr{T}$，使$\mathscr{B}(x)$是x的邻域基。

【习　　题】

1. 在实数空间R中，形如

$$\{x:x>a\},\ \{x:x<b\},\ a,\ b\in R$$

的集族构成实数空间通常拓扑的子基。

2. 在有序集$(E,\leqslant)$中，令$S_r(x)=\{y:x\leqslant y\}$，则以$\{S_r(x)\}$为子基，E 可以确定为拓扑空间，称之为右序拓扑空间。

3. 设$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的两族开集，若其中有一个是$\mathscr{T}$的基，则它们都是$\mathscr{T}$的基，当且仅当它们满足下述二条件：

a. 对于任意$W\in\mathscr{B}_1$及任意$x\in W$，有$V\in\mathscr{B}_2$使$x\in V\subset W$；

b. 对于任意$V\in\mathscr{B}_2$及任意$x\in V$，有$W\in\mathscr{B}_1$使$x\in W\subset V$。

4. 设$(X,<)$为线性序集，所有形如

$\{x:x<a\}$，$\{x:a<x\}$

的集族为子基在X确定的拓扑称为序拓扑(order topology).试证序拓扑是使序连续的最小拓扑。即若a，$b\in X$，$a<b$，则有a的邻域U，b的邻域V，使每当$x\in U$，$y\in V$，恒有$x<y$。

5. 设$\mathscr{S}$是集合X的子集族，若

a. $\mathscr{S}\neq\phi$，

b. $X=\bigcup_{S\in\mathscr{S}}S$，

则$\mathscr{S}$是X上某拓扑的子基.

6. 设$f:(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$，则$f$是连续的，当且仅当Y中某拓扑子基的成分在$f$下的原象是X的开集。

§5 可数空间
(countable space)

拓扑空间可有各种不同的基和子基，根据所考虑的问题可以适当选取。特别地，当开基的基数是可数时，称为可数基(countable base).有可数基的拓扑空间具备很多重要的性质。这种空间称为满足第二可数公理(second axiom of countability)的空间。简称为第二可数空间。

定理1 设A为第二可数空间X的不可数子集，则在A中必有A的聚点。

证明 设$\mathscr{B}$是X的可数基．若A的点都不是A的聚点，则对每点$x\in A$，必有x的开邻域G_x，使$G_x\cap A\setminus\{x\}=\phi$．因$\mathscr{B}$是基，故可选取$B_x\in\mathscr{B}$，使$x\in B_x\subset G_x$．当$y\in A$，$y\neq x$时，因$G_x\cap A\setminus\{x\}=\phi$，故$y\notin G_x$．即$B_x\neq B_y$．于是$A$的每一点和$\mathscr{B}$的子族的成分之间有一一对应关系．因$\mathscr{B}$是可数的，故$A$至多是可数的．这与$A$是不可数的矛盾．

定理2 第二可数空间必是可分空间．

证明 设$\mathscr{B}$为拓扑空间X的可数基，则

$$\mathscr{B}=\{U_n: n\in N\}.$$

取$x_n\in U_n$，$n\in N$，做$A=\{x_n: n\in N\}$，则A是X的可数稠子集．

实际上，设$y\in X$，U为y的任一邻域，因$\mathscr{B}$是基，故有$U_y\in\mathscr{B}$，使$y\in U_y\subset U$．因U_y中必有A的点，故$U\cap A\neq\phi$．因U是任意的，故$y\in\overline{A}$．即$X\subset\overline{A}$．

因X具有可数稠子集A，故X为可分空间．

可分空间却未必是第二可数空间．

例1 设X是不可数集．它的拓扑$\mathscr{T}$是由X本身、ϕ及X的有限子集的补集组成．则每个非有限集B都是X的稠子集．实际上，由拓扑的构造，B和每个非空开集相交，由§2习题10知B是X的稠子集．因B可以是可数集，故X是可分空间．

若X有可数基$\mathscr{B}$，设x为X的固定点，因每点的补集是开集，故所有含x的开集族的交必须是$\{x\}$．于是含x的基的成分的交是$\{x\}$．但这可数交的补是可数个有限集的并，因此X是可数的，与X是不可数集矛盾．故X不是第二可数空间．

拓扑空间X满足**第一可数公理**（first axiom of countability），当且仅当X的每点的邻域系有可数邻域基．X也称之为第一可数空间．

显然，第二可数空间是第一可数空间。

任意不可数的离散拓扑空间是第一可数空间。实际上，关于每点 x 的邻域系有由单点邻域 $\{x\}$ 组成邻域系的基。但这个空间不是第二可数空间。

上例亦指出第一可数空间未必是可分空间。

可分空间也未必是第一可数空间。如例 1 不可列单点闭拓扑空间。

定理 3 第一可数空间中每点都有单调下降的可数邻域基。

证明 若 $\{U_n : n \in N\}$ 是点 x 的可数邻域基，令 $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$，则 $\{V_n : n \in N\}$ 也是点 x 的邻域基，且 $V_n \supset V_{n+1}$ $(n \in N)$。

邻域族 $\mathscr{S}_x$ 是关于点 x 的邻域系的**子基**（subbase for the neighborhood system）或 x 的**局部子基**（local subbase），当且仅当 $\mathscr{S}_x$ 的成分的有限交全体的族是 x 的局部基。

定理 4 若 X 在每点 x 都存在可数局部子基，则 X 是第一可数空间。

证明 若 $\{U_n : n \in N\}$ 是点 x 的可数局部子基，令 $V_n = \bigcap \{U_k : k \leqslant n\}$，则 $\{V_n : n \in N\}$ 是点 x 的可数局部基。

定理 5 设 A 为第一可数空间 X 的子集，则 x 是 A 的接触点，当且仅当 x 是 A 的点列 $(x_n, \ n \in N)$ 在 X 中的极限。即对于 x 的任意邻域 U，有 $n_0 \in N$，当 $n \geqslant n_0$ 时，$x_n \in U$。

证明 由定理 3，设 $\{U_n : n \in N\}$ 是 x 的单调下降的邻域基。因 $x \in \overline{A}$，故对于任意 $n \in N$，有 $x_n \in A \cap U_n$。显然 A 的点列 $(x_n, \ n \in N)$ 在 X 中收敛于 x。

反之，设 V 是 x 的任意邻域，则有 $n_0 \in N$。当 $n \geqslant n_0$ 时，$x_n \in V$。即 $V \cap A \neq \phi$。故 $x \in \overline{A}$。

推论 设 A 为第一可数空间 X 的子集，则 A 是 X 的闭集，

当且仅当若有A的点列$(x_n,\ n\in N)$收敛于$x\in X$,则$x\in A$。

实际上，因A是闭集$\Longleftrightarrow A=\overline{A}$，故由定理可直接推得.

定理 6 设X为第一可数空间，Y为拓扑空间，$f:X\to Y$为映射，f是连续的，当且仅当若X的序列$(x_n,\ n\in N)$收敛于x，则Y的序列$(f(x_n),\ n\in N)$收敛于$f(x)$。

证明 设在X中$x_n\to x_0$，对于任意$U\in\mathscr{U}(f(x_0))$，由f的连续性，必有$f^{-1}(U)\in\mathscr{U}(x_0)$，因$x_n\to x_0$，故有$n_0\in N$，当$n\geqslant n_0$时，$x_n\in f^{-1}(U)$。于是当$n\geqslant n_0$时必有$f(x_n)\in U$。故$f(x_n)\to f(x_0)$。

反之，若f在x_0点不连续，则有$U\in\mathscr{U}(f(x_0))$，使得对于任意$V\in\mathscr{U}(x_0)$,均有

$$f(V)\cap\mathscr{C}U\neq\phi.$$

设$\{B_n: n\in N\}$是x_0点的单调下降可数邻域基，则对于每个n，$f(B_n)\cap\mathscr{C}U\neq\phi$。取$y_n\in f(B_n)\cap\mathscr{C}U$,因$y_n\in f(B_n)$，故有$x_n\in B_n$使$f(x_n)=y_n$。因$B_n$是单调下降的，故$x_n\to x_0$。但因$y_n\in\mathscr{C}U$，故$f(x_n)=y_n$不可能收敛于$f(x_0)$。

【习 题】

1. 第二可数空间X的任一拓扑基$\mathscr{B}$必含有可数子族是X的拓扑基。

2. 拓扑空间X满足可数链条件 (countable chain condition)，当且仅当X的每个开集的不相交族是可数的。试证可分空间满足可数链条件。但反之不真。

3. 设$f:X\to Y$是连续开满射，若X是第一（二）可数空间，则Y也是第一（二）可数空间。

4. 实直线在右序拓扑下是可分的，但不具有可数基.

5. 伪度量空间是第一可数空间。

6. 伪度量空间是第二可数空间,当且仅当它是可分空间。

7. 设Ω为小于或等于第一不可数序数 ω_1 的所有序数的集合。令 $X=\Omega\setminus\{\omega_1\}$，$N$ 表示非负整数集。关于序拓扑，N 是离散的且满足第二可数公理。而X满足第一可数公理，但不满足第二可数公理。Ω不满足任一可数公理。

§6 子空间、诱导拓扑

(subspace、induced topology)

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，Y为X的子集，令

$$\mathscr{U}=\{U: U=G\cap Y,\ G\in\mathscr{T}\}.$$

容易证明$(Y,\mathscr{U})$是拓扑空间.$\mathscr{U}$称为$\mathscr{T}$的相关拓扑(relative topology)，$(Y,\mathscr{U})$称为$(X,\mathscr{T})$的子空间 (subspace)。

$\mathscr{U}$的成分U称为Y中开集、相关开集或$\mathscr{U}$开集.它的相关补集，即 $Y\setminus U$ 称为Y中闭集、相关闭集或$\mathscr{U}$闭集。Y的子集A关于拓扑$\mathscr{U}$的闭包是A在Y中的闭包(closure in Y)或$\mathscr{U}$闭包。

不论Y在X中是什么样的集合，Y在子空间$(Y,\mathscr{U})$中是既开且闭的. 一般的，拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子空间，当且仅当$Y\subset X$，且$\mathscr{U}$是$\mathscr{T}$的相关拓扑.

容易推得可迁性成立.即若$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，$(Z,\mathscr{V})$是$(Y,\mathscr{U})$的子空间，则$(Z,\mathscr{V})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间。

设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，A是Y的子集,自然可以定义A是$\mathscr{T}$闭集或$\mathscr{U}$闭集,A是$\mathscr{T}$聚点或$\mathscr{U}$聚点，A的$\mathscr{T}$闭包或$\mathscr{U}$闭包以及点y的$\mathscr{T}$邻域或$\mathscr{U}$邻域等概念，不再赘述。

定理1 设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，A是Y的子集，则A是$\mathscr{U}$闭集，当且仅当A是Y和某个$\mathscr{T}$闭集的交。

证明 A是$\mathscr{U}$闭集$\Longleftrightarrow Y\setminus A$是$\mathscr{U}$开集$\Longleftrightarrow Y\setminus A=V\cap Y$，其中$V$是$\mathscr{T}$开集$\Longleftrightarrow A=(X\setminus V)\cap Y$,对某个$\mathscr{T}$开集$V\Longleftrightarrow A$

是Y和一个$\mathscr{T}$闭集的交.

定理2 设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，A是Y的子集，则Y的点y是A的$\mathscr{U}$接触点，当且仅当y是A的$\mathscr{T}$接触点。

证明 因U是y的$\mathscr{U}$邻域$\Longleftrightarrow$有y的$\mathscr{T}$邻域V，使$U=V\cap A$.故由接触点的定义，y是A的$\mathscr{U}$接触点$\Longleftrightarrow$对于y的任意$\mathscr{U}$邻域U必有$U\cap A\neq\phi\Longleftrightarrow(V\cap Y)\cap A=V\cap(Y\cap A)=V\cap A\neq\phi\Longleftrightarrow y$是$A$的$\mathscr{T}$接触点.

推论：设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，A是Y的子集，则A的$\mathscr{U}$闭包是A的$\mathscr{T}$闭包和Y的交.

设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，若Y是X的开子集，则Y的开集也是X的开集，若Y是X的闭子集，则Y的闭集也是X的闭集.

定理3 设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，则包含映射$i:Y\to X$是连续的。

证明 对X的任一$\mathscr{T}$开集U，$i^{-1}(U)=U\cap Y$，故为$\mathscr{U}$开集。由§3定理1知i为连续映射.

可见$\mathscr{U}$拓扑是使i为连续的最弱拓扑.

将包含映射保证f的连续性推广为一般情形，自然想到诱导拓扑。有下述两种情形：

a．设$f:X\to Y$是集合X到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的映射，在X上导入拓扑，使f为连续映射。

b．设$f:X\to Y$是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到集合Y上的映射，在Y上导入拓扑，使f为连续映射.

首先考虑a.显然，为了保证f的连续性，在X可确定的拓扑不是唯一的，如离散拓扑就是一个。显然，若关于X的拓扑$\mathscr{T}$，f是连续的，则对于比$\mathscr{T}$强的拓扑，f都是连续的。故这个问题必须考虑使f连续的X的最弱拓扑。

定理4 设$f:X\to Y$为集合X到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的映

射，作

$$\mathscr{T}=f^{-1}(\mathscr{U})=\{f^{-1}(G):G\in\mathscr{U}\},$$

则（$X,\mathscr{T}$）是拓扑空间，使映射 f 是连续的．而且$\mathscr{T}$是使映射 f 为连续的 X 的最弱拓扑．

证明 由$\mathscr{U}$满足$\mathscr{T}_a$，$\mathscr{T}_b$，$\mathscr{T}_c$及 f^{-1} 的性质(预章§2)，可直接推得$\mathscr{T}$满足$\mathscr{T}_a$，$\mathscr{T}_b$，$\mathscr{T}_c$，故($X,\mathscr{T}$)是拓扑空间．由 f 连续性的等价条件：开集的原象是开集，故根据$\mathscr{T}$的规定，f是（$X,\mathscr{T}$）到（$Y,\mathscr{U}$）的连续映射．

若$\mathscr{T}_1$也是使 f 连续的 X 的拓扑，则必须有$\mathscr{T}_1\supset f^{-1}(\mathscr{U})=\mathscr{T}$，故$\mathscr{T}$是使 f 为连续的最弱拓扑．

定理 4 确定的 X 的拓扑$\mathscr{T}$称为由拓扑空间（$Y,\mathscr{U}$）及映射 $f:X\to Y$ 确定的诱导拓扑（induced topology）．

其次考察 b．显然为了保证 f 的连续性，在 Y 上可确定的拓扑也不是唯一的．如在 Y 上确定密集拓扑即可．显然，在 Y 上确定拓扑$\mathscr{U}$使 f 是连续的，则关于比$\mathscr{U}$弱的拓扑，f 也必是连续的．故必须考虑 Y 上使 f 是连续的最强拓扑．

定理 5 设 f 是拓扑空间(X，$\mathscr{T}$)到集合 Y 上的满射，令

$$\mathscr{U}=\{G:\ G\subset Y,\ f^{-1}(G)\in\mathscr{T}\},$$

则($Y,\mathscr{U}$)是拓扑空间，使 f 是连续的．而且$\mathscr{U}$是使映射 f 是连续的 Y 的最强拓扑．

类似于定理 4 即可证出．

定理 5 确定的 Y 的拓扑$\mathscr{U}$，也称为由拓扑空间($X,\mathscr{T}$)及满射 $f:X\to Y$ 确定的诱导拓扑(induced topology)．

【习　　题】

1．第二可数空间的子空间也是第二可数空间．

2．设($Y,\mathscr{U}$)是($X,\mathscr{T}$)的子空间，则$\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$，当且仅当 $Y\in\mathscr{T}$．

3. 设Y是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集，$\mathscr{T}_0$是$\mathscr{T}$的拓扑基，则

$$\mathscr{U}_0=\{Y\cap G:G\in\mathscr{T}_0\}$$

是$\mathscr{U}$的拓扑基。

4. 设f为$(X,\mathscr{T})$到$(Y,\mathscr{U})$的连续映射，X_0为X的子集，Y_0为满足$f(X_0)\subset Y_0$的Y的子集，令f_0为f在X_0上的限制映射，则f_0为关于X_0，Y_0的相关拓扑的连续映射。

5. 设$f:X\to(Y,\mathscr{U})$为集合X到拓扑空间Y的映射，在X由Y和f确定的诱导拓扑为$\mathscr{T}$，试证关于拓扑$\mathscr{T}$,对于X的任一子集E，有

$$\overline{E}=f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

6. 举例说明可分空间的子空间未必是可分空间。

7. 设 $f:X\to Y$，$f(X)\subset B\subset Y$。用g表示将f看做X到B的映射，则对$x\in X$，下述命题等价：

a. 拓扑空间X到拓扑空间Y的映射f在x点连续；

b. 拓扑空间X到拓扑空间B的映射g在x点连续。

8. 设f为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的连续映射，$\mathscr{U}$是由$\mathscr{T}$和f确定的诱导拓扑，则$\mathscr{U}\subset f(\mathscr{T})$，但$\mathscr{U}=f(\mathscr{T})$未必成立。

9. 设f为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的满射，且f是连续开映射。则$\mathscr{U}=f(\mathscr{T})$且$\mathscr{U}$和$(X,\mathscr{T})$及$f$确定的诱导拓扑相一致。

10. 设Y为拓扑空间X的稠密子集，N为X的闭子集，若$N\cap Y$在子空间Y中含有某点x的邻域，则N在X中含有x的邻域。

11. 设$(X,<)$为序拓扑空间，Y为X的子集，则关于$<$，Y是线性序集。但关于Y的序拓扑可以不是关于X的相关序拓扑。

第四章　拓扑空间的分离性与连通性
(separability and connectedness of topological space)

§1　分离公理
(separation axiom)

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为T_0空间 (T_0space)或Колмогоров空间，当且仅当对于X的任意相异二点x，y，有x的邻域U使$y\notin U$，或有y的邻域V使$x\notin V$，二者之一必成立。

定理 1　拓扑空间X是T_0空间，当且仅当对于X的任意相异二点x,y，$x\notin\overline{\{y\}}$或$y\notin\overline{\{x\}}$成立。

证明　$y\notin\overline{\{x\}}\Longleftrightarrow y$有邻域$V$，使$x\notin V$。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为T_1空间(T_1 space)或 Frèchet空间，当且仅当对于X的任意相异二点x,y，有x的邻域U和y的邻域V使$y\notin U$且$x\notin V$。

定理 2　拓扑空间X是T_1空间，当且仅当单点集是闭集。

证明　对于任意相异二点x,y，有x的邻域U和y的邻域V使$y\notin U$且$x\notin V\Longleftrightarrow x\notin\overline{\{y\}}$且$y\notin\overline{\{x\}}\Longleftrightarrow$任意异于$y$的点皆不在$\overline{\{y\}}$中。故$\overline{\{y\}}=\{y\}$。

例 1　右序拓扑空间是T_0空间，但不是T_1空间。

例 2　多于1点的密集拓扑空间不是T_0空间。

例 3　设$\mathscr{T}=\{X,\phi,$有限点集$\}$，则$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间。因单点集是闭集，故$(X,\mathscr{T})$为T_1空间。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为T_2空间 (T_2 space)或 Hausdorff 空间，当且仅当对于X的任意相异二点x,y，有x的邻域U和y

的邻域V使$U\cap V=\phi$.

上述例3当X为无限集时，不是T_2空间．因任意二非空开集的交不空．

定理 3 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是T_1空间，当且仅当在X的各点x，x的闭邻域的全体的交是$\{x\}$.

证明 设E为x的闭邻域全体的交．若$y\neq x$，取$x\in U_x\in\mathscr{U}(x)$，$y\in U_y\in\mathscr{U}(y)$，使$U_x\cap U_y=\phi$.则$W=\overline{U}_x$是不含$y$的$x$的闭邻域，故$y\notin E$．即$E=\{x\}$.

反之，若$y\neq x$，则有x的闭邻域W不含有y．令$U=W^\circ$，$V=\mathscr{C}W$，则$U\cap V=\phi$，$U\in\mathscr{U}(x)$，$V\in\mathscr{U}(y)$.

拓扑空间X称为T_3空间（T_3 space）或 Vietoris 空间，当且仅当对于X的闭子集F，和不属于F的X的点x，存在x的邻域U和F的邻域V，使$U\cap V=\phi$.

T_3空间同时为T_1空间时，称为**正则空间**(regular space)．

有些书籍将T_3空间称为正则空间，而将正则空间称为T_3空间．

定理 4 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是T_3空间，当且仅当X有闭邻域基．

证明 对于任一$x\in X$及任一开邻域$U_x\in\mathscr{U}(x)$，则$\mathscr{C}U_x$为不含x的闭集．由T_3条件有开集V，W，使$x\in V$，$W\supset\mathscr{C}U_x$，$V\cap W=\phi$.故$V\subset\mathscr{C}W\subset U_x$.因$\mathscr{C}W$为闭集，故$\overline{V}\subset\mathscr{C}W\subset U_x$.即$x$有闭邻域基．

反之，对于任意闭集F和$x\notin F$，$\mathscr{C}F$为含x的开集．因x有闭邻域基，故有$V\in\mathscr{U}(x)$使$\overline{V}\subset\mathscr{C}F$.于是$\mathscr{C}\overline{V}\supset F$，$x\in V$，$V\cap\mathscr{C}\overline{V}=\phi$．故$X$为$T_3$空间．

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是T_4空间(T_4 space)，当且仅当对于X的任意二不相交闭集F_1,F_2，存在开集U,V，使$F_1\subset U$，$F_2\subset V$，$U\cap V=\phi$．（Tietze 第一公理）

T_4空间且为T_1空间时称为**正规空间**（normal space）．

和T_3空间、正则空间同样，有些书籍将T_4空间称为正规空间，而将正规空间称为T_4空间。

定理 5 拓扑空间是T_4空间，当且仅当对任意闭集F及包含F的开集G，必存在开集U，使

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset G.$$

和定理 4 的证明方法相同即可证得本定理，留给读者自证。

例 4 设$X=\{a,b\}$，$\mathscr{T}_1=\{\phi,X\}$，$\mathscr{T}_2=\{\phi,\{a\},X\}$，$\mathscr{T}_3=\{\phi,\{b\},X\}$，$\mathscr{T}_4=\{\phi,\{a\},\{b\},X\}$，则$(X,\mathscr{T}_1)$是拓扑空间，但不是$T_0$空间。

$(X,\mathscr{T}_2)$及$(X,\mathscr{T}_3)$是T_0空间，但不是T_1空间。

只有$(X,\mathscr{T}_4)$是T_2空间，其余都不是。

$(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_2)$，$(X,\mathscr{T}_3)$，$(X,\mathscr{T}_4)$都是T_4空间，且$(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_4)$是T_3空间。但$(X,\mathscr{T}_1)$不是正则空间。

$(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_2)$，$(X,\mathscr{T}_3)$虽是T_4空间但不是正规空间。

在$(X,\mathscr{T}_2)$中$\{b\}$是闭集，$a\notin\{b\}$，$\{b\}$的邻域只有X，故$(X,\mathscr{T}_2)$虽是T_4空间但非T_3空间，当然也不是正则空间。

在例 4 中观察序列$(x_n, n\in N)$，

$$x_n=\begin{cases} a, & \text{当} n=2k, \\ b, & \text{当} n=2k+1. \end{cases}$$

在$(X,\mathscr{T}_1)$中$(x_n,n\in N)$的极限为a,b。在$(X,\mathscr{T}_2)$中，$(x_n,n\in N)$的极限为b，在$(X,\mathscr{T}_3)$中，$(x_n,n\in N)$的极限为a，在$(X,\mathscr{T}_4)$中，$(x_n,n\in N)$无极限。

由此例可看出序列的极限依拓扑之不同亦各异，拓扑弱者极限较多，而拓扑越强极限点越少。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为T_5空间（T_5 space），当且仅当X的任意子空间是T_4空间。T_5空间同时为T_1空间时称为完全正规空间（completely normal space）或继承的正规空间（hereditarily normal space）。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集A,B称为**分离集**(separated set),当且仅当$\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\phi$。

定理 6 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是T_5空间，当且仅当对于X的任意分离集A，B，存在开集U，V，使$A\subset U$，$B\subset V$，$U\cap V=\phi$（Tietze 第二公理）。

证明 设A,B为X的分离集。令$G=X\backslash(\overline{A}\cap\overline{B})$，则$G$是开集。令$A_1=\overline{A}\cap G$，$B_1=\overline{B}\cap G$，则$A_1\cap B_1=\phi$且$A_1$，$B_1$在$G$中是闭集。因$G$满足$T_4$，故在$G$中有相对开集$U$，$V$，使$A_1\subset U$，$B_1\subset V$，$U\cap V=\phi$。由第三章§6定理2推论知$U,V$在$X$中亦为开集。由$\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\phi$，故$A\cup B\subset G$且$A\subset A_1$，$B\subset B_1$。于是$A\subset U$，$B\subset V$。

反之，设H为拓扑空间X的子空间，在H中A,B为不相交的相对闭集，因$A=\overline{A}\cap H$，$B=\overline{B}\cap H$，故$\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\phi$。于是由条件在$X$中有开集$U,V$，使$A\subset U,B\subset V,U\cap V=\phi$。令$U_1=U\cap H,V_1=V\cap H$，则$U_1,V_1$为$H$中相对开集，使$A\subset U_1$，$B\subset V_1$，$U_1\cap V_1=\phi$。即$H$为$T_4$空间。

【习　　题】

1. 试证T_i空间的同胚象是T_i空间$(i=0,1,2,3,4,5)$。
2. T_1空间的任意子集的导集是闭集。
3. 例3的拓扑是满足T_1条件的最弱拓扑。
4. 设$\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$为集合$X$上的两个拓扑，$\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$，若$(X,\mathscr{T}_1)$是$T_2$空间，则$(X,\mathscr{T}_2)$也是$T_2$空间。
5. 设X为拓扑空间，若对于任意二不同点x,y，存在T_2空间Y及连续映射$f:X\to Y$，使$f(x)\neq f(y)$，则X为T_2空间。
6. 举例说明T_2空间的连续象未必是T_2空间。
7. 实数集R上以$[a,b)$型集族为基导入拓扑$\mathscr{T}$，则$(R,\mathscr{T})$是第一可数、可分、T_2空间，也是完全正规空间。

8. 设A为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的任意子集，则A^d是闭集，当且仅当对任意$x\in X$，$\{x\}^d$是闭集.

9. 试证下列叙述等价：

a. 单点a组成的集$\{a\}$是闭集；

b. 对于X的任意子集A，含A的所有开集G的交是集A；

c. 含有点a的所有开集的交是$\{a\}$；

d. X的任意子集都是闭集的并；

e. X的每个非空子集都含有非空闭子集.

10. 设$\{\mathscr{T}_a:a\in D\}$是固定集X上的T_3拓扑族，则它们的最小上界也是T_3拓扑.

11. 设X为实数集，规定X的真子集C是闭集，当且仅当在通常拓扑下C是有界闭集. 则X是T_1空间，但不是T_2空间.

12. 若T_0空间X具有可数基，则集X的基数最多是$\mathfrak{c}$.

13. 若X为有限集，$(X,\mathscr{T})$为T_1空间，则$(X,\mathscr{T})$是离散空间.

14. 若X为T_0及T_3空间，则X为T_2空间.

15. 试证下列叙述等价：

a. 对每个非空开集G和每个$x\in G$，有开集Q_x，使$x\in Q_x\subset\overline{Q}_x\subset G$；

b. 对每个闭集A，A的所有闭邻域的交是集A；

c. 对于每个集A和开集B，若$A\cap B\neq\phi$，则有开集G，使$A\cap G\neq\phi$，且$\overline{G}\subset B$；

d. 对于非空集A和闭集B，若$A\cap B=\phi$，则有不相交开集G_A和G_B，使

$A\cap G_A\neq\phi$，$B\subset G_B$.

16. 举例指出，在集X上可给与拓扑$\mathscr{T}_1$、$\mathscr{T}_2$，使$\mathscr{T}_1<\mathscr{T}_2$，$\mathscr{T}_1$是$T_3$的而$\mathscr{T}_2$不是.

§ 2 函数分离性

(functional separation)

定理 1 设f,g是拓扑空间X到T_2空间Y的连续映射，则

$$F=\{x:\ f(x)=g(x),x\in X\}$$

是X的闭子集.

证明 由F的作法，对任意$x\notin F$，有$f(x)\neq g(x)$. 由Y的T_2性，有$U\in\mathscr{U}(f(x))$，$V\in\mathscr{U}(g(x))$，使$U\cap V=\phi$. 由第三章§3定理1，$f^{-1}(U)$和$g^{-1}(V)$都是x的邻域. 由V_b，$f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$是x的邻域. 设

$$W=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V).$$

若$y\in W$，则$f(y)\in U,g(y)\in V$. 因$U\cap V=\phi$，故$f(y)\neq g(y)$. 即$y\in\mathscr{C}F$. 故$W\subset\mathscr{C}F$，从而$\mathscr{C}F$为开集，而F为闭集.

若Y不是T_2空间，则定理不成立.

例 1 设$X=\{a,b\}$,$\mathscr{T}_1=\{\phi,\{a,b\}\}$,$\mathscr{T}_2=\{\phi,\{a,b\},\{a\}\}$，$f(a)=a$，$f(b)=b$，$g(a)=g(b)=a$.

因$f^{-1}(\phi)=g^{-1}(\phi)=\phi$，$f^{-1}(\{a,b\})=g^{-1}(\{a,b\})=\{a,b\}$，故$f,g$都是$(X,\mathscr{T}_2)$到$(X,\mathscr{T}_1)$的连续映射. 但

$$\{x:\ f(x)=g(x)\}=\{a\}$$

在$(X,\mathscr{T}_2)$中不是闭集.

推论 设f为X上连续实值函数，则

$$\{x:\ f(x)=0\}$$

是X的闭子集.

设A为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集，若有$f\in C(X)$，使

$$A=\{x:\ f(x)=0\}$$

成立，则称A为**零集**(zero set).

若有$g\in C(X)$，使

$$A=\{x:\ g(x)\neq 0\},$$

则称A为补零集(cozero set)．

推论 零集为闭集，补零集为开集．

定理 2 设f,g为拓扑空间X到T_2空间Y的连续映射，A为X的稠子集．若在A的各点上，$f(x)=g(x)$成立，则在X上恒有$f(x)=g(x)$．

证明 令$F=\{x: f(x)=g(x)\}$，由定理1，F为闭集．由条件$A\subset F$，故$\overline{A}\subset\overline{F}=F$．因$\overline{A}=X$，故$F=X$．

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是完全正则空间(completely regular space)，当且仅当对于X的任意闭集F和X的任一点$x_0\notin F$，在X上存在连续实值函数$f: X\to R$，使

a．$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，　即$f(X)\subset[0,1]$；

b．$f(x_0)=0$；

c．$f(F)=1$，　即当$x\in F$时，$f(x)=1$．

当完全正则空间同时为T_1空间时称为 **Тихонов** 空间．

定理 3 Тихонов 空间是正则空间．

证明 设F为拓扑空间X的任意闭子集，$x_0\notin F$．则由条件有实值连续函数$f:X\to R$，使$f(x_0)=0$，$f(F)=1$，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$．令

$$G=\{x:f(x)<\frac{1}{2}\},$$

则G为开集，且$x_0\in G\subset\overline{G}=\{x:f(x)\leqslant\frac{1}{2}\}\subset\{x: f(x)<1\}\subset\mathscr{C}F$．于是有开集$G$和$\mathscr{C}\overline{G}$，使$x_0\in G$，而$F\subset\mathscr{C}\overline{G}$，故$X$为正则空间．

各种拓扑空间之间有下述关系：

定理 4 a．度量空间是完全正规空间；

b．完全正规空间是正规空间；

c．正规空间是 Тихонов 空间；

d．Тихонов 空间是正则空间；

e．正则空间是T_2空间；

f. T_2空间是T_1空间；

g. T_1空间是T_0空间。

证明 a 由第一章§5习题12和§1定理6直接推得。

d 是定理 3；

e 是§1定理2的直接结果；

b，f，g，都是显然的；

c 的证明在§3中。

关于空间的继承性有下述定理。

定理 5 a. 度量空间的子空间是度量空间；

b. 完全正规空间的子空间是完全正规空间；

c. 完全正则空间的子空间是完全正则空间；

d. 正则空间的子空间是正则空间；

e. T_2空间的子空间是T_2空间；

f. T_1空间的子空间是T_1空间；

g. T_0空间的子空间是T_0空间。

由概念容易证得定理，证明留给读者。

关于正规空间只有闭子集必是正规空间，一般的子空间未必还是正规空间。反例在§3中。

定理 6 第二可数的正则空间$(X,\mathscr{T})$是正规空间。

证明 设A,B为X中不相交闭集，$\mathscr{B}$为$\mathscr{T}$的可数基，

$$\mathscr{B}=\{U_n: n\in N\}.$$

对于$a\in A$，则 $a\in \mathscr{C}B$。由T_3性，有开集 G_a，使$a\in G_a\subset \overline{G}_a\subset \mathscr{C}B$。对于$a$和 G_a必有$U_a\in\mathscr{B}$，使$a\in U_a\subset G_a$，故$\overline{U}_a\subset \mathscr{C}B$。同样的，对于各$b\in B$必有$U_b\in\mathscr{B}$，使$b\in U_b\subset\overline{U}_b\subset\mathscr{C}A$。于是得到$\mathscr{B}$的子族$\{U_a: a\in A\}$和$\{U_b: b\in B\}$。它们都是至多可列集，设分别为$\{U_{n_i}\}$和$\{U_{m_i}\}$，显然，$A\subset\bigcup_i U_{n_i}$，$B\subset\bigcup_i U_{m_i}$。

令

$$G_1=U_{n_1},\quad H_1=U_{m_1}\setminus\overline{G}_1,$$

一般的，当已确定了G_1，G_2，…，G_{k-1}，$H_1, H_2, \cdots, H_{k-1}$时，确定

$$G_k = U_{n_k} \setminus \overline{(H_1 \cup \cdots \cup H_{k-1})},$$
$$H_k = U_{m_k} \setminus \overline{(G_1 \cup \cdots \cup G_k)}.$$

令

$$O_1 = \bigcup G_k, \quad O_2 = \bigcup H_k,$$

由

$$\overline{H}_k \subset \overline{U}_{m_k} \subset \mathscr{C}A, \quad \overline{G}_k \subset \overline{U}_{n_k} \subset \mathscr{C}B,$$

得

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_{n_k} \cap A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = O_1 \text{及} B \subset O_2.$$

O_1 及 O_2 皆为开集，且

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (G_i \cap H_j) = \phi.$$

于是满足T_4条件，故$(X, \mathscr{T})$为正规空间。

推论　第二可数的正则空间必是完全正规空间。

实际上，第二可数性和正则性都是继承性质。

【习　　题】

1．T_4空间的闭子空间仍为T_4空间。

2．完全正规空间的子空间仍为完全正规空间。

3．Тихонов 空间的子空间仍为 Тихонов 空间。

4．零集是可数个补零集的交。

5．A是零集，当且仅当有$f \in C(X)$，和$r \in R$，使
$A = \{x: f(x) \leqslant (\geqslant) r\}$。

6．设V为拓扑空间X的闭子集，$f: X \to I$，若f在V及$\mathscr{C}V^\circ$上都是连续的，则f是连续的。

§ 3 正规空间

(normal space)

定理 1 设$(X,\mathscr{T})$是T_4空间，$\{G_1,\cdots,G_n\}$为开集族，使$X=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$，则必存在闭集族$\{F_1,\cdots,F_n\}$，满足：

$$F_i\subset G_i,\ i=1,2,\cdots,n,\ X=\bigcup_{i=1}^{n}F_i.$$

证明 对各G_j，必有

$$X\setminus\bigcup_{i\neq j}G_i\subset G_j.$$

因X是正规空间，由§1定理5，有开集O_j满足

$$X\setminus\bigcup_{i\neq j}G_i\subset O_j\subset\overline{O}_j\subset G_j.$$

用O_j代替G_j，则有

$$X=O_j\cup(\bigcup_{i\neq j}G_i).$$

用这种方法，在$\{G_1,\cdots,G_n\}$中，用O_1代替G_1，使$\overline{O}_1\subset G_1$，且$\{O_1,G_2,\cdots,G_n\}$覆盖$X$。在$\{O_1,G_2,\cdots,G_n\}$中，用$O_2$代替$G_2$，使$\overline{O}_2\subset G_2$，且$\{O_1,O_2,\cdots,G_n\}$覆盖$X$。最后用$O_n$代替$G_n$，使$\overline{O}_n\subset G_n$，且$\{O_1,O_2,\cdots,O_n\}$覆盖$X$。令

$$F_i=\overline{O}_i.$$

则$\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$即为所求。

定理 2 (Урысон) 设$(X,\mathscr{T})$为T_4空间，A_1，A_2为X的闭集，若$A_1\cap A_2=\phi$，则存在X上的实值连续函数f：$X\to R$，满足

a．$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，即$f(X)\subset[0,1]$；

b．当$x\in A_1$，$f(x)=0$，即$f(A_1)=0$；

c．当$x\in A_2$，$f(x)=1$，即$f(A_2)=1$。

证明 确定开集$G_1=\mathscr{C}A_2$。因X为T_4空间，故对应$A_1\subset G_1$，

有开集G_0，使 $A_1\subset G_0\subset\overline{G}_0\subset G_1$。对应$\overline{G}_0\subset G_1$，有开集$G_{\frac{1}{2}}$，使$\overline{G}_0\subset G_{\frac{1}{2}}\subset\overline{G}_{\frac{1}{2}}\subset G_1$.对应$\overline{G}_0\subset G_{\frac{1}{2}}$，$\overline{G}_{\frac{1}{2}}\subset G_1$，分别有开集$G_{\frac{1}{2^2}}$，$G_{\frac{3}{2^2}}$，使$\overline{G}_0\subset G_{\frac{1}{2^2}}\subset\overline{G}_{\frac{1}{2^2}}\subset G_{\frac{1}{2}}\subset\overline{G}_{\frac{1}{2}}\subset G_{\frac{3}{2^2}}\subset\overline{G}_{\frac{3}{2^2}}\subset G_1$。如此用二分法继续做下去。一般地，对应$\overline{G}_{\frac{m}{2^n}}\subset G_{\frac{m+1}{2^n}}$，有开集$G_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}}$，使$\overline{G}_{\frac{m}{2^n}}\subset G_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}}\subset\overline{G}_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}}\subset G_{\frac{m+1}{2^n}}$。于是对于所有形如$r=\frac{m}{2^n}$的二进小数，都定义了开集$G_r$，使

$$A_1\subset G_0,\ \overline{G}_r\subset G_s,\ (r<s),\ G_1=\mathscr{C}A_2.$$

今对$x\in A_2=\mathscr{C}G_1$，令$f(x)=1$，对$x\in G_1$，令

$$f(x)=\inf\{r:\ x\in G_r\}.$$

则$0\leqslant f(x)\leqslant 1$.特别地，对$x\in A_1$，则$x\in G_0$。从而$f(x)=0$。由函数的定义知，若$x\in G_r$，则$f(x)\leqslant r$；若$x\notin\overline{G}_r$，因$x\notin G_r$，必有$f(x)\geqslant r$。

最后证明，映射$f: X\to R$是连续的。对于任意$x\in X$和$\varepsilon>0$。若$f(x)=0$，取小于ε的二进小数r，则G_r是x的邻域，当$y\in G_r$时，$|f(y)-f(x)|\leqslant r<\varepsilon$；若$f(x)=1$，取二进小数$r>1-\varepsilon$，则$\mathscr{C}\overline{G}_r$是$x$的邻域，当$y\in\mathscr{C}\overline{G}_r$时，$f(y)\geqslant r$，于是$|f(x)-f(y)|\leqslant 1-r<\varepsilon$；若$0<f(x)<1$，取二进小数$r, r'$，使$f(x)-\varepsilon<r<f(x)<r'<f(x)+\varepsilon$，令$U(x)=G_{r'}\setminus\overline{G}_r$，则$U(x)$为$x$的开邻域。若$y\in U(x)$，则$r\leqslant f(y)\leqslant r'$，即$|f(y)-f(x)|<\varepsilon$。

总之，不论$f(x)$的值为何，f都是连续的。于是f满足所要求的全部性质。

定理 3 在拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中，若对于不相交的任意闭集A_1，A_2，恒存在X上的实值函数：$f: X\to R$，满足

a．$0\leqslant f(x)\leqslant 1$；

b．$f(x)=0$，当$x\in A_1$；

c．$f(x)=1$，当$x\in A_2$。

则$(X,\mathscr{T})$为T_4空间。

证明 对应不相交的闭集A_1,A_2，设f: $X\to R$满足条件，令

$$U=\{x\in X: f(x)<1/2\},\quad V=\{x\in X: f(x)>1/2\},$$

则U,V为开集，且$U\supset A_1$，$V\supset A_2$，$U\cap V=\phi$。故X是T_4空间。

定理 4 （Урысон扩张定理）设$(X,\mathscr{T})$为T_4空间，F为X的闭子集，φ: $F\to R$为F上实值有界连续函数，则存在X上的实值有界连续函数$f:X\to R$，满足

a．$f|F=\varphi$;

b．$\sup\{|f(x)|:x\in X\}=\sup\{|\varphi(x)|:x\in F\}$。

证明 令$\mu_0=\sup\{|\varphi(x)|: x\in F\}$。若$\mu_0=0$，则$\varphi(F)=0$，$f(x)=0$ $(x\in X)$即为所求的函数。故可就$\mu_0>0$讨论。

在F上，令$\varphi_0=\varphi$，再令

$A_0=\{x:x\in F,\ \varphi_0(x)\leqslant -\mu_0/3\}$,

$B_0=\{x: x\in F,\ \varphi_0(x)\geqslant\mu_0/3\}$.

因$\varphi_0:F\to R$是连续的，F为X的闭集，故A_0,B_0是X的闭集。由定理2有X上的连续函数$f_0:X\to R$，使

$$f_0(X)\subset[-\mu_0/3,\mu_0/3],f_0(A_0)=-\mu_0/3,f_0(B_0)=\mu_0/3,$$

再在F上，令

$$\varphi_1(x)=\varphi_0(x)-f_0(x),$$

则$\varphi_1:F\to R$是连续的，且$\mu_1=\sup|\varphi_1(F)|\leqslant 2\mu_0/3$。

用由φ_0定义φ_1的方法，由φ_1定义$\varphi_2:F\to R$，即设

$A_1=\{x:x\in F,\varphi_1(x)\leqslant -\mu_1/3\}$,

$B_1=\{x:x\in F,\varphi_1(x)\geqslant\mu_1/3\}$.

取连续函数$f_1:X\to R$，使

$$f_1(X)\subset[-\mu_1/3,\mu_1/3],f_1(A_1)=-\mu_1/3,f_1(B_1)=\mu_1/3,$$

在F上，令

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)-f_1(x),$$

如此作下去，作出F上的连续函数列，

$$\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$$

和X上的连续函数列

$$\{f_0,f_1,f_2,\ \cdots,\ f_n,\ \cdots\}$$

使

$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)-f_n(x),\ x\in F.$$

对于$\mu_n=\sup|\varphi_n(F)|$，$n=1,2,\cdots$，有

$$\sup|f_n(X)|\leqslant\mu_n/3,\ \mu_{n+1}\leqslant 2\mu_n/3.$$

于是，有

$$\sup|\varphi_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\mu_0,\quad \sup|f_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{\mu_0}{3}\right).$$

在X上，若令

$$S_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f_i(x),\ n=0,1,2,\cdots,$$

则因

$$|S_n(x)-S_{n+r}(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{r}|f_{n+i}(x)|$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{\mu_0}{3}\right)\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{2}{3}\right)^i,$$

故$\{S_n(x)\}$在X上是一致收敛的（按通常函数一致收敛的概念）。从而

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),\ (x\in X)$$

在X上是连续函数。而且

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{\mu_0}{3}\right)=\mu_0.$$

故

$$\sup_{x\in X}|f(x)|\leqslant\mu_0=\sup_{x\in F}|\varphi(x)|.$$

于是b成立。

最后，对于$x\in F$，因$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$，故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x))\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\varphi_0(x)-\varphi_{n+1}(x)]=\varphi_0(x)=\varphi(x).$$

故f: $X\to R$即为所求的函数之一。

定理 5 设$(X,\mathscr{T})$为T_4空间，F为X的闭子集，φ：$F\to R$为连续函数，则存在X上的连续函数ψ：$X\to R$，使

$$\psi|F=\varphi。$$

证明 设g为R到开区间$(-1,1)$上的保序同胚映射，令$h=g\circ\varphi$，则h为F到$(-1,1)$中的连续映射。由定理4，存在X上的实值有界连续函数q:$X\to R$，满足

a．$q|F=h$；

b．$\sup\limits_{x\in X}|q(x)|\leqslant 1$。

再令$\psi(x)=g^{-1}(q(x))$，则ψ: $X\to R$为连续函数，且$\psi|F=\varphi$。实际上，在F上有$\psi=g^{-1}\circ q=g^{-1}\circ h=g^{-1}\circ g\circ\varphi=\varphi$。

定理 6 若拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的任意闭集F上的连续函数恒可扩张为X上的连续函数，则X是T_4空间。

证明方法与定理3本质相同，其证明留给读者。

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为T_6空间或**Vedenisov**空间，当且仅当任意非空闭集是零集。即对于X的非空闭集F，存在实值连续函数f，使$f(F)=0$而$f(\mathscr{C}F)\neq 0$。

T_6空间同时是T_1空间时称为**完备正规空间**(perfectly normal space)。

设A为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集，A称为G_δ集，当且仅当A为可数个开集的交。A称为F_σ集，当且仅当A为可数个闭集的并。

定理 7 对于T_4空间$(X,\mathscr{T})$的子集F，下述条件是等价的：

a．F是闭集且为G_δ集；

b．F是零集。

证明 设$F=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$，$G_i$为开集。由定理2，有连续映射

$f_i: X \to [0,1]$满足

$$f_i(x)=0,\ 当\ x\in F;$$

$$f_i(x)=1,\ 当\ x\in \mathscr{C}G_i.$$

令 $f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i/2^i$，因连续函数列一致收敛的极限是连续的，故 f: $X\to[0,1]$为连续映射；而且 $F=\{x\in X: f(x)=0\}$。实际上，若$x\notin F$，则有i，使$x\notin G_i$而$f_i(x)\neq 0$。当 $x\in F$时，必有 $f(x)=0$，故$F=\{x: f(x)=0\}$。

反之，设有连续函数f: $X\to[0,1]$，使

$$F=\{x\in X: f(x)=0\}.$$

显然F是闭集．且因

$$F=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x\in X: |f(x)|<\frac{1}{i}\},$$

故F为G_δ集．

推论 1 设A,B为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的不相交零集，则有g: $X\to[0,1]$，使

$$A=\{x\in X: g(x)=0\},\ B=\{x\in X: g(x)=1\}.$$

实际上，取X到$[0,1]$的连续函数f,h，使

$$A=\{x: f(x)=0\},\ B=\{x: h(x)=0\}.$$

令$g=f/(f+h)$，则g即为所求．

推论 2 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是T_6空间，当且仅当X为T_4空间且任意闭集是G_δ集．

这是定理 7 和推论 1 的直接结果．

推论 3 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是完备正规空间，当且仅当X为正规空间且任意闭集是G_δ集．

最后，再介绍几种分离性公理．

拓扑空间X称为完全 Hausdorff 空间 (completely Hausdorff space)，当且仅当对于X的任意相异二点x，y，有$U\in\mathscr{U}(x)$，$V\in\mathscr{U}(y)$，使$\overline{U}\cap\overline{V}=\phi$．

容易看出，每一正则空间是完全 Hausdorff 空间，且每个完全 Hausdorff 空间是 T_2空间；反之都不成立，故这是 T_2空间和正则空间之间的一种类型。

拓扑空间X称为 Урысон 空间，当且仅当对于X的任意相异二点 x,y,存在连续函数 $f: X\to[0,1]$，使 $f(x)=0$，$f(y)=1$。

开集G称为正则开集(regular open set)，当且仅当$G=(\overline{G})^\circ$。

闭集F称为正则闭集(regular closed set)，当且仅当$F=(\overline{F^\circ})$。

拓扑空间X称为半正则(semi-regular)空间，当且仅当正则开集的全体构成X的拓扑基。

关于分离性有下列关系成立。

完备正规⇒完全正规⇒正规⇒Тихонов⇒Урысон

⇓	⇓
正则 ⇒	完全Hausdorff
⇓	⇓
半正则 ⇒	$T_2\Rightarrow T_1\Rightarrow T_0$

【习　题】

1. 在闭连续映射下，正规拓扑空间的象空间是正规空间。

2. 正规空间$(X,\mathscr{T})$的F_σ集合H是正规空间。

3. 零集必为G_δ集。

4. 试证完备正规空间是完全正规空间。

5. 可数集上的正则拓扑是完全正规的。

6. 设 $X=(-1,1)$，X的闭集为ϕ及$[\alpha,\beta](\alpha\leqslant 0\leqslant\beta)$，则$X$既非$T_3$空间也非$T_1$空间，但它是$T_0$及$T_4$空间。

7. 设X是T_4空间，A是X中的闭集，$\{G_1,\cdots,G_n\}$是A的开覆盖，则存在A的开覆盖$\{Q_1,\cdots,Q_n\}$，使得对每个 $i=1,2,\cdots,n$，有$\overline{Q}_i\subset G_i$。

§ 4　连通空间

(connected space)

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是连通空间 (connected space)，当且仅当X不是二非空分离集的并．X的子集Y是连通的，当且仅当关于相关拓扑，拓扑空间Y是连通空间．等价的，Y是连通的，当且仅当Y不是二非空分离集的并．

拓扑空间X上的函数f，若对于X的任意点x，有x的邻域U_x，使f在U_x上的限制$f|U_x$是常值函数，则称f为局部常值函数(local constant function)．

定理 1　关于拓扑空间X，下列诸条件等价：

a．X有开集A,B，使$A\neq\phi,B\neq\phi,X=A\cup B$，$A\cap B=\phi$；

b．X有闭集A,B，使$A\neq\phi,B\neq\phi,X=A\cup B$，$A\cap B=\phi$；

c．X有真子集A，A在X中是既开且闭集；

d．X上有局部常值函数f，在X上不是常值函数；

e．X不是连通空间．

证明　因$A=\mathscr{C}B$，$B=\mathscr{C}A$，故A,B同时为开集与A,B同时为闭集是等价的．这时A,B都是既开且闭的集．故a,b,c是等价的．

a⇒d　对于$x\in A$，令$f(x)=0$；对于$x\in B$，令$f(x)=1$，则f是局部常值函数，但f在X上不是常值函数．

d⇒a　因f不是X上常值函数，故有$a,b\in X$，使$f(a)\neq f(b)$．令$A=\{x: f(x)=f(a)\}$，$B=\{x: f(x)\neq f(a)\}$，因f是局部常值函数，故A,B都是非空开集，且$A\cup B=X$，$A\cap B=\phi$．

a⇒e　设A,B为非空开集，满足$A\cup B=X$，$A\cap B=\phi$，则$\overline{A}\cap B=\phi$，$A\cap\overline{B}=\phi$，故A,B为分离集，而X不是连通空间．

e⇒b　若X不是连通空间，则有非空分离集A,B，使$A\cup B=X$，$\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\phi$，即$A$不含$B$的聚点，$B$亦不含$A$的聚点．故$A,B$都是闭集．

显然，由一点组成的空间、密集拓扑空间都是连通空间，而二点以上的离散拓扑空间不是连通空间。

定理 2 对于拓扑空间的子集A，下列条件是等价的：

a．A不是X的连通集；

b．X有开集G_1，G_2，使$A\cap G_1\neq\phi$，$A\cap G_2\neq\phi$，$A\cap G_1\cap G_2=\phi$，$A\subset G_1\cup G_2$；

c．X有闭集 F_1,F_2，使$A\cap F_1\neq\phi$，$A\cap F_2\neq\phi$，$A\cap F_1\cap F_2=\phi$，$A\subset F_1\cup F_2$；

d．A有真子集B，是A的相对开集且相对闭集。

证明与定理1类似，留给读者证明。

定理 3 设 $f:X\to Y$ 为连续映射，A为X的连通子集，则$f(A)$是Y的连通子集。

证明 若 $f(A)$ 不是Y的连通子集，则由定理2，Y有开集G_1,G_2，使$f(A)\cap G_1\neq\phi$，$f(A)\cap G_2\neq\phi$，$f(A)\cap G_1\cap G_2=\phi$，$f(A)\subset G_1\cup G_2$，令 $f^{-1}(G_1)=A_1$，$f^{-1}(G_2)=A_2$。因 f 是连续的，故A_1,A_2为X的开子集，且$A\cap A_1\neq\phi$，$A\cap A_2\neq\phi$，$A_1\cup A_2\supset A$，$A\cap A_1\cap A_2=\phi$。由定理2，A不是连通集，矛盾。

推论 连通性是拓扑性质。即若空间X与Y同胚，X是连通的，则Y也是连通的。

定理 4 实数空间是连通空间。一般地，任意开区间(a,b)是连通的。

证明 设$R=G_1\cup G_2$，$G_1\cap G_2=\phi$，其中G_1，G_2为非空开集。令$a\in G_1$，

$$B=\{x\in R:[a,x)\subset G_1\},\quad C=\{x\in R:(x,a]\subset G_1\}.$$

因 a 是G_1的内点，故B，C都是非空集。令

$$b=\sup B,\quad c=\inf C.$$

则$B=[a,b)\subset G_1$，$C=(c,a]\subset G_1$（其中$b=+\infty$，$c=-\infty$亦可）。

a．当$b=+\infty$，$c=-\infty$时，$G_1=R$，于是$G_2=\phi$，矛盾。

b．当$b<+\infty$时，$[a,b)\subset G_1$，而$b\notin G_1$，故$b\in G_2$。这与

G_2是开集而 b 是G_2的内点矛盾。

c 。当$c>-\infty$时，$(c,a]\subset G_1$，而$c\notin G_1$. 故 $c\in G_2$，和 b 同样，也是矛盾。

于是R是连通空间。因开区间(a,b)与R是同胚的，故(a,b)也是连通的。

推论 任意实数区间都是连通的。

定理 5 设A是拓扑空间X的连通集，若B满足$A\subset B\subset\overline{A}$，则$B$是$X$的连通集。

证明 否则，由定理 2，有X的开集G_1,G_2，使$G_1\cap B\neq\phi$，$G_2\cap B\neq\phi$，$B\cap G_1\cap G_2=\phi$，$B\subset G_1\cup G_2$。因$B\cap G_1\neq\phi$，故有$x\in B\cap G_1$，因$B\subset\overline{A}$，故 $x\in\overline{A}\cap G_1$。因G_1为x的邻域，且x是A的接触点，故$A\cap G_1\neq\phi$。同样地，$A\cap G_2\neq\phi$，$A\cap G_1\cap G_2\subset B\cap G_1\cap G_2=\phi$，$A\subset B\subset G_1\cup G_2$成立。即$A$不是连通集。

定理 6 （中值定理）设f为连通拓扑空间X上的实值连续函数，对于$a,b\in X$，若$f(a)<f(b)$，则对于满足

$$f(a)<c<f(b)$$

的任意实数c，必有$x\in X$，使$f(x)=c$。

证明 若$c\notin f(X)$，则因 $G_1=(-\infty,c)$，$G_2=(c,+\infty)$是R的开集，而f是连续的，故 $A_1=f^{-1}(G_1)$，$A_2=f^{-1}(G_2)$都是X的开集。$a\in A_1$，$b\in A_2$，$A_1\cap A_2=\phi$，$X=A_1\cup A_2$成立。这与X的连通性矛盾。

定理 7 若A_1,A_2为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的连通集，$A_1\cap A_2\neq\phi$，则$A=A_1\cup A_2$也是连通集。

证明 设$A=G_1\cup G_2$，$G_1\cap G_2=\phi$，G_1,G_2为A中开集。取$x\in A_1\cap A_2$，设$x\in G_1$。

因$A_1=(A_1\cap G_1)\cup(A_1\cap G_2)$，而$A_1\cap G_1$及$A_1\cap G_2$都是$A_1$中相对开集，且$(A_1\cap G_1)\cap(A_1\cap G_2)=\phi$，由$A_1$的连通性，必有$A_1\cap G_2=\phi$，$A_1\cap G_1=A_1$。

同理$A_2\cap G_1=A_2$，故 $A=A_1\cup A_2=(A_1\cap G_1)\cup(A_2\cap G_1)$

$=(A_1\cup A_2)\cap G_1=A\cap G_1=G_1$，$G_2=\phi$。即$A$是连通集。

推论 1　若$\{A_\lambda:\lambda\in D\}$是连通集族，而且任意两个都相交，则$A=\bigcup_{\lambda\in D}A_\lambda$也是连通集。

推论 2　若$\{A_\lambda:\lambda\in D\}$是连通集族，且$\bigcap_{\lambda\in D}A_\lambda\neq\phi$，则$\bigcup_{\lambda\in D}A_\lambda$是连通集。

推论 3　设x为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的任一点，含x的所有连通集的并集仍是连通集。

拓扑空间X中含x的所有连通集的并集C_x是含x的极大连通集。称C_x为X中含x的连通分支(component)。一般地，拓扑空间的极大连通子集称为连通分支或简称为分支。

由定义直接推得，设E为拓扑空间X的连通集，$x\in E$，C_x为含x的连通分支，则$E\subset C_x$。

例　第三章§1例2$(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_2)$，$(X,\mathscr{T}_3)$的连通分支仅有X，而$(X,\mathscr{T}_4)$的连通分支是$\{a\}$，$\{b\}$。

定理 8　设x，y为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的二点，若$y\in C_x$，则$C_y=C_x$。

证明　因$y\in C_x$，故C_x为含y的连通集。由分支的定义$C_x\subset C_y$。故$x\in C_y$。同理又可推得$C_y\subset C_x$。故$C_x=C_y$。

定理 9　拓扑空间X有满足下述诸条件的连通集族$\{C_\alpha\}$。

a．$X=\bigcup C_\alpha$；

b．$C_\alpha\cap C_\beta=\phi$，$(\alpha\neq\beta)$；

c．若A为X的连通子集，则有C_α，使$A\subset C_\alpha$；

d．C_α都是X的极大连通集。即C_α不为任何连通集的真子集。

证明　由定理8及定理7的推论直接证得。

推论　拓扑空间X可按连通分支作成直并分解。

当拓扑空间X的连通分支都由唯一点作成时，称为完全不连通空间(totally disconnected space)。

离散空间是完全不连通空间，但完全不连通空间未必是离散空间。

实数空间的有理数子空间是完全不连通空间。

有限T_1空间也是完全不连通空间。

【习　题】

1. 连通拓扑空间的连续实值函数的象集必是区间。

2. 实数空间是连通空间，当且仅当 Dedekind 公理成立。

3. 多于一点的连通T_1空间必是无限集。

4. 设$\{A_n, n\in N\}$为拓扑空间X的一列连通子集，若$A_n\cap A_{n+1}\neq\phi$，$n=1, 2, \cdots$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$是连通集。

5. 拓扑空间X的连通分支必为闭集。

6. 连通空间的任一真子集E的边界∂E必不是空集。

7. Y是拓扑空间X的非连通子集，当且仅当Y是X的分离集的并集。

8. 设Y是拓扑空间X的连通子集，A是X的既开且闭的集，则$A\cap Y=\phi$，或$\mathscr{C}A\cap Y=\phi$。

9. 若拓扑空间X的任意二点x，y，都有连通集E，使$x\in E$，$y\in E$，则X是连通空间。

10. 设$f:X\to Y$为连续映射，$f(X)$是连通集时，X未必是连通空间。试举例说明。

11. 设E为拓扑空间X的连通子集，对于X的子集A，若$E\cap A\neq\phi$，$E\cap\mathscr{C}A\neq\phi$，则$E\cap\partial A\neq\phi$。

12. 若空间X的连通分支C含有x，则含x的任一开且闭的集必含C。

13. 若拓扑空间X的任意二点a，b，必有开且闭集E，使$a\in$

E，$b\notin E$，则X是完全不连通空间。

14．若Y,Z是拓扑空间X的子集，并且二者都是闭的或都是开的，则$Y\setminus Z$和$Z\setminus Y$是分离集。

15．设A为拓扑空间X的子集，$X=Y\cup Z$，$Y\setminus Z$，$Z\setminus Y$是分离集，则

$$\overline{A}=[\overline{(Y\cap A)}\cap Y]\cup[\overline{(A\cap Z)}\cap Z]。$$

16．若序拓扑空间是序连通的，则它是序完备的（即有上界的非空集有上确界）。

17．设X为连通空间，Y为X的连通子集，且$X\sim Y=A\cup B$，其中A和B是分离集，则$A\cup Y$是连通集。

18．下列三个命题是等价的：

a．拓扑空间X的任意开集在X中稠密；

b．拓扑空间X的任意两个开集必相交；

c．拓扑空间X的任意开集是连通集。

19．若$(X,\mathscr{T}_1)$，$(X,\mathscr{T}_2)$是拓扑空间，且$\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$，则$\mathscr{T}_2$连通集也是$\mathscr{T}_1$连通集。

20．设A,B为拓扑空间X的二连通集，若$\overline{A}\cap B\neq\phi$，则$A\cup B$是连通集。

21．设A,B为X的二非空子集，若A,B是闭集，$A\cup B$，$A\cap B$是连通集，则A和B是连通集。举例指出A和B是闭的假设不能删去。

22．设X是至少含2点的连通空间，则

a．设A为X的连通子集，B为$\mathscr{C}A$的子集，B关于$\mathscr{C}A$是开且闭的，则$A\cup B$是连通集；

b．设A为X的连通子集，B为$\mathscr{C}A$的连通分支，则$\mathscr{C}B$是连通集；

c．指出X中存在二非空连通子集A,B，使$A\cup B=X$，$A\cap B=\phi$。

§ 5　弧状连通空间、局部连通空间

(arcwise connected space、 local connected space)

闭单位区间$I=[0,1]$到拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的连续映射$f: I\to X$的象集，$f(I)=A$称为X中的弧(arc)。当$f(0)=a$，$f(1)=b$时，弧A称为联络始点a与终点b的弧。由§4定理3知弧是连通集。

*拓扑空间$(X,\mathcal{T})$称为***弧状连通空间**(arcwise connected space)，当且仅当联结X的任意二点a,b的弧都存在。

定理 1　弧状连通拓扑空间X是连通空间。

证明　设a为X的一点，对于X的任一点x，以a为始点以x为终点的弧设为r_x，因I为连通集，由§4定理3知r_x为连通集。因$\bigcap_{x\in X} r_x$含有a，由§4定理7推论3知，

$$X=\bigcup_{x\in X} r_x$$

为连通集。

连通拓扑空间未必是弧状连通的。

例 1　设平面上图形

$$A=\{(x,y): y=\sin\frac{1}{x}, 0<x\leqslant 1\},$$

$$B=\{(0,y): y\in[-1,1]\}.$$

容易证明$\overline{A}=A\cup B$，由§4定理3知A是连通集，由§4定理5知$\overline{A}$也是连通集。但$\overline{A}$不是弧状连通集。实际上，A的任一点与B的任一点不能用弧联结。

定理 2　弧状连通空间的连续象是弧状连通的。

证明　设$f: X\to Y$为弧状连通空间X到拓扑空间$Y=f(X)$的连续映射，p,q为Y的任意二点。取$a,b\in X$，使$f^{-1}(p)=a$，$f^{-1}(q)=b$。设以a,b为端点的弧为A，$g: I\to A$为定义弧A的映射，则$f\circ g$

: $I\to f(A)$定义了以p,q为端点的弧，而$f(A)$为以p为始点以q为终点的弧。

推论 弧状连通性是拓扑性质。

拓扑空间X在x点为局部连通(local connected)的，当且仅当在x点具有由连通邻域组成的基本邻域系。拓扑空间X称为局部连通空间(local connected space)，当且仅当在X的任一点x均为局部连通的。

例 2 第三章§1例2的$(X,\mathscr{T}_1)$是连通空间，而且是局部连通空间，$(X,\mathscr{T}_4)$不是连通空间，但是局部连通空间。

平面上两条平行直线是局部连通的，但不是连通的。

例 3 平面上图形

$$E_1=\{(x,y):x\in R,y为有理数\},$$

$$E_2=\{(0,y):y\in R\}.$$

则E_1的分支为

$$A=\{(x,b):x\in R\}.$$

而E_1的各点都不具有连通邻域。故E_1既非连通的，亦非局部连通的。

$E_1\cup E_2$是弧状连通的，从而是连通的。但不是局部连通的。

定理 3 局部连通空间X的连通分支C是X的开且闭集。

证明 若$x\in C$，由定义有x的连通邻域V，$V\subset C$。故C是开集。由§4定理9知$\mathscr{C}C$是X的连通分支的并集，故为开集而C为闭集。

定理 4 拓扑空间X是局部连通的，当且仅当对于X的任意开子集G，G的分支都是开集。

证明 设G为X的开子集，A为G的一个分支。若$x\in A$，则x为G的内点。由X的局部连通性，有x的连通邻域U含于G中。由分支的性质，有$x\in U\subset A$，于是x是A的内点，故A为开集。

反之，设U为X的点x的开邻域，V为在U中含x的分支，则 $x\in V\subset U$，由条件V为连通开集。故X为局部连通空间。

拓扑空间X称为局部弧状连通空间（local arcwise connected space），当且仅当X的任意点x具有弧状连通的基本邻域系。

定理 5 设G为局部弧状连通空间的开集，则G为连通集，当且仅当G为弧状连通集。

证明 设a为G的一点，E为G内和a用弧联结的G的点的全体，对于$0\leqslant t\leqslant 1$，令$\gamma(t)\equiv a$，则γ是G内的弧，故$a\in E$。若$x\in E$，由局部弧状连通的定义，x有邻域V，使$V\subset G$，且V的任一点y和x可用V内的弧联结。因x和a可用G内的弧联结，故y和a可用G内的弧联结。于是$V\subset E$，而E是G的开子集。

其次，设x为G中E的接触点，由定义，x有连通邻域V，使$V\subset G$且V的任意点y在G内和x可用弧联结。实际上，因x为接触点，故$V\cap E\neq\phi$。设$y\in V\cap E$，则y和a在G内可用弧联结。于是x和a在G内可用弧联结。故$x\in E$，而E是G的闭子集。

因E为连通空间G的非空开且闭集，故由§4定理1知$E=G$。即G是弧状连通的。

充分性是定理1的直接结果。

R^n的连通开集称为区域(domain)。

推论 R^n的开集G是区域，当且仅当G是弧状连通的。

设$\mathscr{D}$为集合X的子集族，$\mathscr{D}$的有限子族$\mathscr{D}_n=\{D_i: i=1,2,\cdots,n\}$称为链（chain），当且仅当对$i=1,2,\cdots,n-1$，有$D_i\cap D_{i+1}\neq\phi$。链称为单链(simple chain)，当且仅当除$j=i\pm 1$外$D_i\cap D_j=\phi$。X的子集族$\mathscr{O}$称为被$\mathscr{D}$链锁(chained by $\mathscr{D}$)，当且仅当对任意$A_\beta, A_\gamma\in\mathscr{O}$，存在链$\mathscr{D}_n\subset\mathscr{D}$，使得$A_\beta\cap D_1\neq\phi$，

$A_\gamma \cap D_n \neq \phi$。$\mathscr{O}$称为被$\mathscr{D}$单链锁（simply chained by $\mathscr{D}$），当且仅当对任意$A_\beta, A_\gamma \in \mathscr{O}$，存在单链$\mathscr{D}_n \subset \mathscr{D}$，使得$A_\beta \cap D_1 \neq \phi$，$A_\gamma \cap D_n \neq \phi$。

定理 6 设X是连通拓扑空间，$\{G_\alpha\}$是X的开覆盖，则$\{G_\alpha\}$被$\{G_\alpha\}$链锁。

证明 若$\{G_\alpha\}$不能被$\{G_\alpha\}$链锁，则有$G_1, G_2 \in \{G_\alpha\}$，不存在链$\mathscr{D}_n$，使$G_1 \cap D_1 \neq \phi$，$G_2 \cap D_n \neq \phi$。设

$$\mathfrak{M}_1 = \{G: G \in \{G_\alpha\}, G\text{和}G_1\text{被}\{G_\alpha\}\text{链锁}\}.$$

显然$G_1 \in \mathfrak{M}_1$，$G_2 \notin \mathfrak{M}_1$。设$\mathfrak{M}_2 = \{G_\alpha\} \setminus \mathfrak{M}_1$，则$\mathfrak{M}_1 \neq \phi$，$\mathfrak{M}_2 \neq \phi$。设

$$U = \bigcup_{G \in \mathfrak{M}_1} G; \quad V = \bigcup_{G \in \mathfrak{M}_2} G.$$

则$U \cap V = \phi$，$U \neq \phi$，$V \neq \phi$，$U \cup V = X$。即X不是连通空间。矛盾。

定理 7 设X是拓扑空间，则X是连通空间，当且仅当X能被X的任意开覆盖单链锁。即X的任意两点都能被给定覆盖的有限个开集联结。

证明 设X是连通空间，$\{G_\alpha\}$是X的开覆盖，任取$x \in X$，令$C_x = \{y: x, y\text{能被}\{G_\alpha\}\text{单链锁}\}$。因$x \in C_x$，故$C_x \neq \phi$。

C_x是开集。实际上，设$y \in C_x$，则存在单链$\mathscr{D}_n = \{G_i: i = 1, 2, \cdots, n\}$，使$x \in G_1, y \in G_n$。对任意$z \in G_n$，因$\mathscr{D}_n$是联结$x$与$z$的单链，故$z \in C_x$，即$G_n \subset C_x$；故$C_x$为开集。

C_x是闭集。实际上，设y为C_x的聚点，则有α使$y \in G_\alpha$且$G_\alpha \cap C_x \neq \phi$。设$z \in G_\alpha \cap C_x$，又设

$$\mathscr{D}_n = \{G_i: i = 1, 2, \cdots, n\}$$

是由x到z的单链。再设k为使$G_\alpha \cap G_k \neq \phi$的最小下标。因$G_n \cap G_\alpha \neq \phi$，故这样的$k$必存在。因此

$$\mathscr{D}_{k+1} = \{G_i: i = 1, 2, \cdots, k, \alpha\}$$

是x到y的单链，所以$y \in C_x$。故C_x是闭集。

因X是连通空间，故$X = C_x$。必要性成立。

反之，设X不是连通空间，则存在A,B使

$$X=A\cup B,\ A\neq\phi,\ B\neq\phi,\ A\cap B=\phi.$$

且A和B是开集。设$a\in A$，$b\in B$，则$\{A,B\}$是X的一个开覆盖，但没有由$\{A,B\}$中的集合构成的由a到b的单链。矛盾。故X必是连通空间。充分性成立。

关于连通性有关问题，在50年代和60年代初期 Kuratowski, Whyburn, Knaster, Lelek, Mycielski, Duda 等获得了许多有趣的结果。

【习　题】

1．设平面上在通常拓扑下的子集E_1,E_2分别是：

$$E_1=\{(0,y):0<y\leqslant 1\},$$

$$E_2=\{(x,0):0<x\leqslant 1\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(\frac{1}{n},y):0<y\leqslant 1\},$$

则$E_1\cup E_2$是连通集，但不是弧状连通集。

2．设G为R^n的区域，f为G上实值连续函数，$a、b\in G$，对于$f(a)<k<f(b)$的任意k，必有$c\in G$，使$f(c)=k$。

3．拓扑空间X是局部连通的，当且仅当对每点x和x的每个邻域U，U中含x的分支是x的邻域。

4．局部连通空间的任一开子集也是局部连通的。而任一子集未必是局部连通的。

5．设f是X到Y上的闭连续映射，X是局部连通空间，则Y也是局部连通空间。

6．设X是连通的局部连通空间。若C是真开子集$A\subset X$的分支，则C的边界$\subset\mathscr{C}A$。

7．设X是连通的局部连通空间，M和N是X中的不相交非空闭集，则有$\mathscr{C}(M\cup N)$的分支C，使$\overline{C}\cap M\neq\phi$，且$\overline{C}\cap N\neq\phi$。

8. 设X是连通的局部连通空间，B是X的真闭子集，C是B的分支，则$C\cap\overline{\mathscr{C}B}\neq\phi$。

9. 举例指出弧状连通空间未必是局部连通空间。

10. 在平面R^2中，设

$E=\{(x,y)$：当x为有理数时，$y\in[-1,0)$；当x为无理数时，$y\in[0,1]\}$。

a. 试证E是连通空间，但非局部连通空间。

b. 设$t\to(f(t),g(t))$是$[0,1]$到E的连续映射，指出f是常值函数。

11. 若X为连通空间，

$\mathscr{D}=\{D_i:i=1,2,\cdots,n\}$

是由闭集D_i构成的X的有限覆盖，则$\mathscr{D}$被$\mathscr{D}$链锁。

12. 局部连通空间的连续象未必是局部连通的。

第五章 收敛与紧性

(convergence and compact)

拓扑与收敛的概念本质上是等价的。可以用收敛定义拓扑空间，也可以在拓扑空间中讨论收敛性。为了讨论收敛性，需要把集列和点列的概念分别推广为滤子和网的概念。二者各有特点。滤子往往容易掌握，而且能和覆盖概念联系起来。但网更直观。

§1 滤 子

(filter)

为了用极限的语言刻画拓扑，H.Cartan 在1937年定义了滤子。在Bourbaki的书中详细地讨论了滤子的概念，并用它讨论了极限。以后 J.Schmidt, G.Bruno, G. Grimerser 等在50年代和60年代初期又对滤子进行了深入的研究。

集合X的子集族$\mathfrak{F}$具有**有限交性质**(finite intersection property)，当且仅当$\mathfrak{F}$的任意有限个元的交不空。$\mathfrak{F}$是有限乘法的(finite multiplicative)，当且仅当属于$\mathfrak{F}$的任意有限个元的交，仍为$\mathfrak{F}$的元。

集合X的子集非空族$\mathfrak{F}$称为集合X上的滤子(filter)，当且仅当$\mathfrak{F}$满足

F_α. 若$M\subset X$，有$N\in\mathfrak{F}$使$M\supset N$，则$M\in\mathfrak{F}$；

F_β. $\mathfrak{F}$是有限乘法的；

F_γ. $\phi\notin\mathfrak{F}$。

例1 拓扑空间X的点x的邻域系$\mathscr{U}(x)$是X上的滤子，称为x的邻域滤子(neighborhood filter)。

集合X的子集非空族$\mathfrak{S}$称为集合X上的滤子子基(filter subbase)，当且仅当$\mathfrak{S}$具有有限交性质。

定理1 设$\mathfrak{S}$为集合X上的子集族，X上含$\mathfrak{S}$的滤子$\mathfrak{F}$存在，当且仅当$\mathfrak{S}$是滤子子基。

证明 由F_β，F_r知$\mathfrak{F}$具有有限交性质，故$\mathfrak{S}$具有有限交性质，即$\mathfrak{S}$是滤子子基。

反之，设

$$\mathfrak{B}=\{E\subset X:\text{有}M_i\in\mathfrak{S},\text{使}\ E=\bigcap_{i=1}^{n}M_i\},$$

$$\mathfrak{F}=\{H\subset X:\text{有}E\in\mathfrak{B},\text{使}E\subset H\}.$$

则$\mathfrak{F}$为含有$\mathfrak{S}$的X上的滤子。

上述定理中提到的滤子$\mathfrak{F}$称为由滤子子基$\mathfrak{S}$生成的(generated)滤子，而$\mathfrak{S}$称为$\mathfrak{F}$的滤子子基。

集合X的非空子集非空族$\mathfrak{B}$称为集合X上的滤子基(filter base)，当且仅当$\mathfrak{B}$是有限乘法的。

定理1的证明中出现的$\mathfrak{B}$是由滤子子基$\mathfrak{S}$确定的滤子基，而$\mathfrak{F}$是由滤子基$\mathfrak{B}$生成的滤子。$\mathfrak{B}$亦称为$\mathfrak{F}$的滤子基。

当X上的两个滤子基（滤子子基）生成同一个滤子时，这两个滤子基（滤子子基）称为等价的。

例2 设X为拓扑空间，$x\in X$，$\mathscr{U}(x)$是x的邻域系。$\mathfrak{B}$是x的基本邻域系，当且仅当$\mathfrak{B}$是x的邻域滤子基，生成邻域滤子。

设$\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$为集合X上的两个滤子，若$\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}_2$成立，则称$\mathfrak{F}_1$弱于$\mathfrak{F}_2$，或$\mathfrak{F}_1$粗于$\mathfrak{F}_2$，$\mathfrak{F}_2$强于$\mathfrak{F}_1$，或$\mathfrak{F}_2$细于$\mathfrak{F}_1$。

设$\{\mathfrak{F}_\alpha:\alpha\in D\}$是$X$上的滤子族，按上述规定的滤子间的强弱关系，确定序关系为$\mathfrak{F}_\alpha>\mathfrak{F}_\beta\Longleftrightarrow\mathfrak{F}_\alpha\supset\mathfrak{F}_\beta$。

定理2 设$\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2$为生成滤子$\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2$的滤子基，$\mathfrak{F}_2$比$\mathfrak{F}_1$强，

当且仅当对任意 $B_1\in\mathfrak{B}_1$，有 $B_2\in\mathfrak{B}_2$ 使 $B_2\subset B_1$。

证明 必要性．因$B_1\in\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}_2$，$\mathfrak{F}_2=\{E\subset X:$有$M\in\mathfrak{B}_2$使$M\subset E\}$。故对应 $B_1\in\mathfrak{B}_1$，有 $B_2\in\mathfrak{B}_2$，使 $B_2\subset B_1$。

充分性。若 $M\in\mathfrak{F}_1$，则有 $B_1\in\mathfrak{B}_1$，使 $B_1\subset M$。由条件有 $B_2\in\mathfrak{B}_2$，使$B_2\subset B_1$。故 $B_2\subset M$。于是$M\in\mathfrak{F}_2$，故有$\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}_2$。即$\mathfrak{F}_2$比$\mathfrak{F}_1$强。

由滤子的强弱关系，显然非空集X上的滤子全体的集合是有序集，而且有下列定理：

定理 3 非空集合X上的滤子全体的集合，关于强弱关系构成归纳的有序集（即任一全序子集都有上界）。

证明 设 $\{\mathfrak{F}_\alpha,\alpha\in D\}$ 是 X 上的滤子的全序族。令 $\mathfrak{F}=\bigcup\limits_{\alpha\in D}\mathfrak{F}_\alpha$。若$\mathfrak{F}$含有$N$，设 M为满足$N\subset M\subset X$ 的集，则有 $\alpha\in D$使$N\in\mathfrak{F}_\alpha$。由F_a知$M\in\mathfrak{F}_\alpha\subset\mathfrak{F}$。故$\mathfrak{F}$满足$F_a$。

对有限个 $M_i\in\mathfrak{F}(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，各 i 有 $\alpha_i\in D$，使 $M_i\in\mathfrak{F}_{\alpha_i}$。因滤子$\mathfrak{F}_{\alpha_1},\mathfrak{F}_{\alpha_2}\cdots\cdots,\mathfrak{F}_{\alpha_n}$由全序性是比较可能的，故有 $j\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，使$\mathfrak{F}_{\alpha_i}\subset\mathfrak{F}_j(i=1,2,\cdots,n)$。因 $M_i\in\mathfrak{F}_j$，故$\bigcap\limits_{i=1}^{n}M_i\in\mathfrak{F}_j\subset\mathfrak{F}$。于是$\mathfrak{F}$满足$F_\beta$。

因$\phi\notin\mathfrak{F}_\alpha(\alpha\in D)$，故$\phi\notin\mathfrak{F}$，而$F_\gamma$也成立。

由作法确定$\mathfrak{F}$是 $\{\mathfrak{F}_\alpha:\alpha\in D\}$ 的上确界。故X上的滤子的全体的集合是归纳的。

集合X上的滤子 $\mathfrak{U}$称为X上的**超滤子**（ultrafilter）或**极大滤子**（maximal filter），当且仅当若滤子$\mathscr{H}\supset\mathfrak{U}$，则$\mathscr{H}=\mathfrak{U}$。

定理 4 对于X上的任意滤子$\mathfrak{F}$，有比 $\mathfrak{F}$ 强的X上的极大滤子$\mathfrak{U}$。

证明 由定理 3，应用 Zorn引理于$\mathfrak{F}$即可。

推论 设$\mathfrak{S}$为非空集X上的滤子基，则有含$\mathfrak{S}$的极大滤子。

定理 5 设$\mathfrak{U}$为X上的极大滤子，$M_i(i=1,2,\cdots,n)$为X

的有限个子集。若$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \in \mathfrak{U}$,则 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 中必有一个属于$\mathfrak{U}$。

证明 对于$(n-1)(n \geqslant 2)$假定定理成立。若$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \in \mathfrak{U}$，而 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 都不在$\mathfrak{U}$中，由归纳法假设，必有$L = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i \notin \mathfrak{U}$。在$X$上观察滤子

$$\mathfrak{F} = \{M \subset X : L \cup M \in \mathfrak{U}\}.$$

容易证明$\mathfrak{F}$是含$\mathfrak{U}$的滤子，$M_n \in \mathfrak{F}$。因$M_n \notin \mathfrak{U}$，与$\mathfrak{U}$是极大滤子矛盾。故$M_1, M_2, \cdots, M_n$中必有属于$\mathfrak{U}$者。

推论 设$\mathfrak{U}$为X上的极大滤子，对于X的任意子集A，必有$A \in \mathfrak{U}$或$\mathscr{C}A \in \mathfrak{U}$。

定理 6 设$\mathfrak{H}$为集合X上的滤子，若对于X的任意子集A，必有$A \in \mathfrak{H}$或$\mathscr{C}A \in \mathfrak{H}$，则$\mathfrak{H}$为$X$上的极大滤子。

证明 由定理4，有X上的极大滤子$\mathfrak{U}$，使$\mathfrak{U} \supset \mathfrak{H}$。设$M \in \mathfrak{U}$，若$M \notin \mathfrak{H}$，则由条件$\mathscr{C}M \in \mathfrak{H}$。因$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{U}$，故$\mathscr{C}M \in \mathfrak{U}$。在$\mathfrak{U}$中$M \cap \mathscr{C}M = \phi$，这是不可能的。故$M \in \mathfrak{H}$，而$\mathfrak{H} = \mathfrak{U}$。

例 3 设X是非空集，$a \in X$，则

$$\mathfrak{N} = \{M \subset X : a \in M\}$$

是X上的滤子，由定理6是X上的极大滤子。

设$\mathfrak{B}$为集合X的滤子基，f为集合X到集合Y的映射，则显然$f(\mathfrak{B}) = \{f(B) \subset Y : B \in \mathfrak{B}\}$是$Y$上的滤子基。

定理 7 设$\mathfrak{B}$为集合X上的极大滤子$\mathfrak{U}$的基，f为集合X到集合Y的映射，则$f(\mathfrak{B})$是Y上的极大滤子基。

证明 设M是Y的任一子集，由定理5的推论知$f^{-1}(M) \in \mathfrak{U}$或$\mathscr{C}f^{-1}(M) \in \mathfrak{U}$。因$f^{-1}(M) \cup f^{-1}(\mathscr{C}M) = X$，$f^{-1}(M) \cap f^{-1}(\mathscr{C}M) = \phi$。故$\mathscr{C}f^{-1}(M) = f^{-1}(\mathscr{C}M)$。于是$f^{-1}(M) \in \mathfrak{U}$或$f^{-1}(\mathscr{C}M) \in \mathfrak{U}$。故有$B \in \mathfrak{B}$使$B \subset f^{-1}(M)$或$B \subset f^{-1}(\mathscr{C}M)$。因此$f(B) \subset M$或

$f(B)\subset\mathscr{C}M$成立。由定理6知$f(\mathfrak{B})$生成Y上的极大滤子。

设X为拓扑空间，$x\in X$，$\mathfrak{F}$为X上的滤子，$\mathfrak{F}$收敛(convergence)于x，当且仅当$\mathfrak{F}$比x的邻域滤子强。这时，称x为滤子$\mathfrak{F}$的极限(limit)。写作$\mathfrak{F}\to x$。

例4 设

$$\mathfrak{F}=\{M\subset R:\text{有 } b\in R,\ \text{使}[b,+\infty)\subset M\}.$$

则$\mathfrak{F}$是R上的滤子。设$\mathfrak{G}$是比$\mathfrak{F}$强的滤子，则$\mathfrak{G}\to+\infty$。

例5 设N为自然数集，

$\mathfrak{F}=(M\subset N:\text{有自然数 } n_0,\ \text{使}\{n_0,n_0+1,\cdots\}\subset M\}$，则$\mathfrak{F}$是$N$上的滤子。称为$N$上的 Fréchet 滤子。比$\mathfrak{F}$强的$N$上的滤子$\mathfrak{G}$，均有$\mathfrak{G}\to\infty$。

设$\mathfrak{B}$为拓扑空间X的滤子基，X的点x是$\mathfrak{B}$的接触点(cluster point)，当且仅当$x\in\bigcap_{B\in\mathfrak{B}}\overline{B}$。$\mathfrak{B}$的全部接触点的集合称为$\mathfrak{B}$的触集合 (adherence set)。同样可以定义滤子的接触点。

由定义直接推得下述定理。

定理8 设$\mathfrak{B}$为拓扑空间X上的滤子基，$x\in X$，$\mathscr{U}(x)$为x的邻域系。x是$\mathfrak{B}$的接触点，当且仅当若$B\in\mathfrak{B}$，$V\in\mathscr{U}(x)$，则$B\cup V\neq\phi$。

推论 x是滤子$\mathfrak{F}$的接触点，当且仅当若$A\in\mathfrak{F}$，$V\in\mathscr{U}(x)$，则$A\cap V\neq\phi$。

定理9 设$\mathfrak{F}$为拓扑空间X上的滤子，$x\in X$。x是$\mathfrak{F}$的接触点，当且仅当X上有滤子$\mathfrak{C}$，使$\mathfrak{F}\subset\mathfrak{C}$，$\mathfrak{C}\to x$。

证明 由定理8知$\mathfrak{F}\cup\mathscr{U}(x)$是滤子子基，设$\mathfrak{F}\cup\mathscr{U}(x)$生成滤子$\mathfrak{C}$，则$\mathfrak{C}\supset\mathfrak{F}$且$\mathfrak{C}\to x$。

反之，因$\mathfrak{C}\to x$，故$\mathscr{U}(x)\subset\mathfrak{C}$。又因$\mathfrak{F}\subset\mathfrak{C}$，故$\mathfrak{F}\cup\mathscr{U}(x)\subset\mathfrak{C}$，由定理8知$x$是$\mathfrak{F}$的接触点。

定理10 拓扑空间X上的极大滤子$\mathfrak{U}$收敛于X的点x，当且仅当x是$\mathfrak{U}$的接触点。

此定理由定理9可直接推得。

设$\mathfrak{F}$为集合X上的滤子，y为拓扑空间Y的点，$f:X\to Y$为映射。当$f(\mathfrak{F})\to y$时，称y为映射f关于滤子$\mathfrak{F}$的极限(limit)。记作$\lim_{\mathfrak{F}} f=y$，$\lim\limits_{x,\mathfrak{F}} f(x)=y$，或$\lim f=y$。特别地，当$X$为拓扑空间，$\mathfrak{F}$为点$a$的邻域滤子时，写作$\lim\limits_{x\to a} f(x)=y$。

由定义直接推得下列定理。

定理11 设$\mathfrak{F}$为集合X上的滤子，y为拓扑空间Y的点，$f:X\to Y$为映射，则$\lim_{\mathfrak{F}} f=y$，当且仅当对任意$V\in\mathscr{U}(y)$，有$M\in\mathfrak{F}$，使$f(M)\subset V$。

定理12 设X为拓扑空间，Y为T_1空间，$f:X\to Y$为映射，$a\in X$，$y\in Y$。若$y=\lim\limits_{x\to a} f(x)$，则$y=f(a)$。

证明 若$y\neq f(a)$，则有y的邻域V，使$f(a)\notin V$。由定理11，有a的邻域U，使$f(U)\subset V$。则$f(a)\in V$。矛盾。

定理13 设X，Y为拓扑空间，$f:X\to Y$为映射，$a\in X$，f在点a连续，当且仅当$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

由连续的定义及定理11直接可得。

定理14 设X，Y为拓扑空间，$f:X\to Y$为映射，$a\in X$，若f在点a连续，则对于收敛于a的X上的滤子基$\mathfrak{B}$，有$f(\mathfrak{B})\to f(a)$。

反之，对于X上收敛于a的所有极大滤子$\mathfrak{U}$，若$f(\mathfrak{U})\to f(a)$，则f在点a连续。

证明 对于任意$V\in\mathscr{U}(f(a))$，有a的邻域U，使$f(U)\subset V$。故有$B\in\mathfrak{B}$，使$f(B)\subset V$。由定理11知$f(\mathfrak{B})\to f(a)$。

反之，若f在a点不连续，则有$W\in\mathscr{U}(f(a))$，使$f^{-1}(W)\notin\mathscr{U}(a)$。由定理1知$\mathscr{U}(a)\cup\{\mathscr{C}f^{-1}(W):W\in\mathscr{U}(f(a))\}$生成$X$上的滤子。由定理4知有比它强的极大滤子$\mathfrak{U}$。因$\mathscr{U}(a)\subset\mathfrak{U}$，故$\mathfrak{U}\to a$。因$f(\mathfrak{U})\to f(a)$，对于$W\in\mathscr{U}(f(a))$，有$U\in\mathscr{U}(a)$，使$f(U)\subset W$。由$U\subset f^{-1}(W)$，有$f^{-1}(W)\in\mathfrak{U}$。因$\mathscr{C}f^{-1}(W)$，$f^{-1}(W)\in\mathfrak{U}$，故$\phi\in\mathfrak{U}$。这是矛盾。

设X，Y为拓扑空间，A为X的子集，$f:A\to Y$为映射。

当 $a\in\overline{A}$时，对于 a 的邻域滤子$\mathscr{U}(a)$,$\mathscr{U}(a)\cap A=\{U\cap A:U\in\mathscr{U}(a)\}$是$A$上的滤子．当$Y$的点$y$对于$\mathscr{U}(a)\cap A$是$f$的极限时，写作

$$y=\lim_{x\to a,\,x\in A} f(x).$$

称为关于子空间A，f在a点的极限．这时$y\in\overline{f(A)}$．

【习　　题】

1．滤子$\mathfrak{F}$是极大的，当且仅当和$\mathfrak{F}$的每个成分相交的集A必有$A\in\mathfrak{F}$．

2．设$\mathfrak{F}$是X上的滤子，$p\in X$，若$\mathfrak{F}\to p$，则P是$\mathfrak{F}$的接触点．

3．U是开集，当且仅当若滤子$\mathfrak{F}$收敛于U的某点，则$U\in\mathfrak{F}$．

4．点x是集合A的聚点，当且仅当有滤子$\mathfrak{F}$，使$\mathfrak{F}\to x$且$A\setminus\{x\}\in\mathfrak{F}$．

5．设Φ_x是收敛于x点的滤子的全体，则$\cap\{\mathfrak{F}:\mathfrak{F}\in\Phi_x\}$是$x$的邻域滤子．

6．若$\mathfrak{F}\to x$且$\mathfrak{G}\supset\mathfrak{F}$,则$\mathfrak{G}\to x$．

7．设X为拓扑空间，Y为T_1空间，$a\in X$，a非X的孤立点．$f:X\setminus\{a\}\to Y$为映射，则$\lim_{x\to a}f(x)$存在，当且仅当$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$．

§2　网和定向集

(net and directed set)

在第一章§4已经讨论了度量空间中点列的收敛与极限，它们是关于拓扑最直观且最原始的一种想法．第三章中已经看到第一可数空间的拓扑可用序列的极限确定，对一般拓扑空间

来说这是做不到的。Moore—Smith 为了将这种方法应用于一般情形，1922年建立了网和定向集上的收敛理论．1937年G.Birkhoff应用Moore—Smith收敛于一般拓扑．

有序集$(D,\leqslant)$称为定向集（directed set），当且仅当对于任意$\alpha,\beta\in D$，有$\gamma\in D$，使$\alpha\leqslant\gamma,\beta\leqslant\gamma$．

例 1　全序集$(D,\leqslant)$是定向集．

实际上，对于任意$\alpha,\beta\in D$必有$\alpha\leqslant\beta$或$\beta\leqslant\alpha$．取α,β中的大者为γ即可．

例 2　格$(D,\leqslant)$也是定向集．

即对于$\alpha,\beta\in D$，取$\gamma=\alpha\cup\beta$，则有$\alpha\leqslant\gamma$，$\beta\leqslant\gamma$．

例 3　自然数集是定向集．

实际上，自然数集按通常的大小关系是全序集．

例 4　集合 X 上的滤子 $\mathfrak{F}$，规定$A\leqslant B\Longleftrightarrow B\subset A$，则$(\mathfrak{F},\leqslant)$是定向集．

例 5　拓扑空间X的一点x，$\mathscr{U}(x)$为其邻域系，按上述规定的关系，“$\leqslant$”，则$(\mathscr{U}(x),\leqslant)$是定向集．

这是例 4 的邻域滤子的特殊情形．

做为定向集的子集，下列二类是重要的．

定向集$(D,\leqslant)$的子集A是共尾的（cofinal），当且仅当对于任意$\alpha\in D$，有$\alpha_1\in A$使$\alpha\leqslant\alpha_1$．

定向集$(D,\leqslant)$的子集A是等终的（eventially），当且仅当对于某个$\alpha_0\in D$，若$\alpha\geqslant\alpha_0$，则$\alpha\in A$．

对于$\alpha_0\in D$，令

$$D(\alpha_0)=\{\alpha:\alpha\in D,\alpha\geqslant\alpha_0\},$$

显然，$D(\alpha_0)$是D的等终集合．

例 6　拓扑空间X的一点x的邻域系$\mathscr{U}(x)$看作定向集时，$\mathscr{U}(x)$的子族$\mathscr{U}_0(x)$是共尾的，当且仅当$\mathscr{U}_0(x)$是x的基本邻域系．

例 7　自然数集合N的任意无限子集E必是N的共尾子

集；反之，N的共尾子集必为无限集。

例8 设

$$D=\{(n,m):n,m\text{为自然数}\},$$

在D中规定 $(n,m)>(n_1,m_1)\Longleftrightarrow n>n_1,m>m_1$，则$D$为定向集。令

$$D_1=\{(n,1):n\text{为自然数}\},$$

则D_1是D的定向子集，但不是D的共尾子集。

由定义有下列事实成立。

定理1 定向集的等终子集是共尾子集。

证明 若A为定向集$(D,\leqslant)$的等终子集，则存在$\alpha_0\in D$。当$\alpha\geqslant\alpha_0$时，有$\alpha\in A$。于是对任意 $\alpha_1\in D$，必有 $\alpha_2\in A$，使$\alpha_2\geqslant\alpha_1$且$\alpha_2\geqslant\alpha_0$，故$A$为共尾子集。

定理2 定向集D的共尾子集A，作为D的子有序集也是定向集。

证明 对于 $\alpha_1,\alpha_2\in A\subset D$，因$D$是定向集，故有$\beta\in D$，使 $\alpha_1\leqslant\beta,\alpha_2\leqslant\beta$。因$A$是共尾的，对于$\beta\in D$有$r\in A$，使$\beta\leqslant\gamma$，故有$\alpha_1\leqslant\gamma,\alpha_2\leqslant\gamma$。即$A$为定向集。

定理3 设定向集$D=A_1\cup A_2$。若A_1不是等终的，则A_2是共尾的。若A_1不是共尾的，则A_2是等终的。特别地，A_1,A_2中最少有一个是共尾的。

证明 若A_1不是等终的，则对于任意$\alpha_0\in D$，有 $\alpha_1\geqslant\alpha_0$，使$\alpha_1\in D\backslash A_1\subset A_2$，即$A_2$是共尾的。

若A_1不是共尾的，则有$\alpha_0\in D$。当$\alpha\geqslant\alpha_0$时，皆有$\alpha\notin A_1$。即$D(\alpha_0)\subset D\backslash A_1\subset A_2$，故$A_2$是等终的。

后一结论是显然的。

设Y为集合，$(D,\leqslant)$为定向集。以$\alpha\in D$为下标的Y的点S_α的集合

$$\{S_\alpha:\alpha\in D\}$$

称为(Y的)定向点集(directed point set)或网(net)，简记作

$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$或$S$。

换言之，网是由定向集$(D, \leqslant)$和映射$f: D \to Y$所共同确定的定向点集(D, f)。这里并不要求f是一一映射。当$\alpha \neq \beta$时，可以有$S_\alpha = S_\beta$。如对于所有$\alpha \in D$，皆有$S_\alpha = S_0$，则也得到一个网，称之为**常值网**(constant net)。

特别地，当$D = N$（自然数集）时，网就是通常的序列。

设A是Y的子集，称网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$**在集$A$中**，当且仅当对所有$\alpha \in D$，有$S_\alpha \in A$。

网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$**终于$A$**，当且仅当有$\alpha_0 \in D$，当$\alpha \geqslant \alpha_0$，$\alpha \in D$时，$S_\alpha \in A$。

网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$**经常在$A$中**，当且仅当对于$D$中每个$\alpha$，有$\beta \in D$，使$\beta \geqslant \alpha$，$S_\beta \in A$。

若网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$经常在$A$中，令

$$E = \{\beta: \beta \in D, S_\beta \in A\},$$

则E是D的共尾子集，而网$\{S_\beta, \beta \in E, \leqslant\}$在$A$中。于是有：

网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$经常在$A$中，当且仅当$D$有共尾子集$E$映象于$A$中，当且仅当网$\{S_\beta, \beta \in E, \leqslant\}$终于$A$，当且仅当网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$不终于$\mathscr{C}A$。

网的概念是序列概念的一般化，自然想到子序列的一般化。

网$\{T_\beta: \beta \in E, \leqslant\}$是网$\{S_\alpha: \alpha \in D, \leqslant\}$的**子网**(subnet)，当且仅当存在$\varphi: E \to D$，使

a．$T = S \circ \varphi$ 即对每个$\beta \in E$，有$T_\beta = S_{\varphi(\beta)}$。

b．对每个$\alpha \in D$，有$\beta \in E$，使若$\gamma \geqslant \beta$，则$\varphi(\gamma) \geqslant \alpha$。

要注意，网是定向集上的函数，子网并不是一般的定向子集上的函数，而$\varphi(E)$是D的共尾的定向子集时，E上的函数。

由网构造子网常采用下述两种方法。

a．设E为D的共尾子集，则$\{S_\beta, \beta \in E, \leqslant\}$是$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$的子网。

实际上，$\varphi: E \to D$ 为恒等映射，保证a E是D的共尾子集，保证b。

b．设$\varphi: E \to D$为定向集E到定向集D的保序映射（即若$\alpha \leqslant \beta$，则$\varphi(\alpha) \leqslant \varphi(\beta)$），且$\varphi(E)$在$D$中共尾．则对于任意网$S$，$S \circ \varphi$是网$S$的子网。这个方法是由 Smith 提出的。

定理 4 设$\mathfrak{M}$是一个集族，若网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$经常在$\mathfrak{M}$的每个成分中，且$\mathfrak{M}$的每两个成分的交含有$\mathfrak{M}$的一个成分，则$S$有一个子网终于$\mathfrak{M}$的每个成分。

证明 因$\mathfrak{M}$的每两个成分的交含有$\mathfrak{M}$的一个成分，故$\mathfrak{M}$按"$\subset$"关系是定向集．作集

$$E = \{(\alpha, A): \alpha \in D, A \in \mathfrak{M}, S_\alpha \in A\}.$$

按$D \times \mathfrak{M}$的顺序，E是定向集。

实际上，若(α, A)，$(\beta, B) \in E$，因$\mathfrak{M}$是定向集，故有$C \in \mathfrak{M}$，使$C \subset A \cap B$．因网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$经常在$\mathfrak{M}$的每个成分中，故有$\gamma \in D$，使$\gamma \geqslant \alpha$，$\gamma \geqslant \beta$，$S_\gamma \in C$．则$(\gamma, C) \in E$，且$(\gamma, C) \geqslant (\alpha, A)$，$(\gamma, C) \geqslant (\beta, B)$。

对于$(\alpha, A) \in E$，令$\varphi(\alpha, A) = \alpha$．因$\{S_\alpha, \alpha \in D\}$经常在$\mathfrak{M}$的每个成分中，故$\varphi$是保序的且$\varphi$的像在$D$中共尾．于是$S \circ \varphi$是$S$的子网。

最后，若$A \in \mathfrak{M}$，则对任一$\alpha_0 \in D$，有$\alpha \geqslant \alpha_0$使$S_\alpha \in A$．若$(\beta, B) \in E$，$(\beta, B) \geqslant (\alpha, A)$，则$S \circ \varphi(\beta, B) = S_\beta \in B \subset A$．即$S \circ \varphi$终于$A$。

序列是网的特殊情形，但值得注意的是序列可以有子网不是它的子序列。

例 9 设

$$\{S_n, n \in N, \leqslant\}$$

为序列，D为正数构成的定向集．令$\varphi: D \to N$为$\varphi(\alpha) = [\alpha]$（$\alpha$的整数部分），$T_\alpha = S \circ \varphi(\alpha) = S_{[\alpha]}$．则

$$\{T_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$$

是定向集D上定义的网。由作法可见 $\{T_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$是$\{S_n, n \in N, \leqslant\}$的子网。

实际上，对任一$\alpha \in D$，都有$T_\alpha = S_{[\alpha]}$。且对每个$n \in N$，有$\alpha \in D$。当$\alpha \geqslant n$时，$\varphi(\alpha) = [\alpha] \geqslant n$。

但T不是S的子序列，因T的定义域是一切正数集。

【习　　题】

1．举例指出定向子集上的网未必是子网。

2．举例指出偏序集未必是定向集。

3．序列必是网，网未必是序列。子序列必是子网，子网未必是子序列。

4．设A_1为A的共尾子集，A_2为A_1的共尾子集，则A_2为A的共尾子集。

5．设A_1为A的等终子集，A_2为A_1的等终子集，则A_2为A的等终子集。

§3　网的收敛性
(convergence of net)

设$(X, \mathscr{T})$为拓扑空间，X的网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$收敛于$X$的点$x_0$，当且仅当对于$x_0$的任意邻域$U \in \mathscr{U}(x_0)$，有适当的$\alpha_0 \in D$。若$\alpha \geqslant \alpha_0$，则$S_\alpha \in U$。即

$$S(D(\alpha_0)) \subset U.$$

换言之，X的网S收敛于X的点x_0，当且仅当S终于x_0的每个$\mathscr{T}$邻域。

这时，x_0称为网S的极限点，记作

$$S_\alpha \to x_0 \text{ 或 } \lim_D S_\alpha = x_0$$

显然收敛的概念依赖于函数S，拓扑$\mathscr{T}$及定向集D。特别

地，当$D=N$时，网的收敛与序列收敛是一致的。

若X是离散空间，则X上的网S收敛于x_0，当且仅当有$\alpha_0\in D$，当$\alpha\geqslant\alpha_0$时，恒有$S_\alpha=x_0$。

若X是密集空间，则X上的网S收敛于X的任一点。可见网的收敛可以有不同的极限点。

定理1 设X是拓扑空间，A是X的子集，$x_0\in X$。x_0是A的聚点，当且仅当在$A\backslash\{x_0\}$上有网S收敛于x_0。

证明 若x_0是A的聚点，则x_0的任一邻域U，必有点$x_U\in U\cap A$，且$x_U\neq x_0$。x_0的邻域系$\mathscr{U}(x_0)$按关系"$\subset$"是定向集。于是作成网$\{x_U,U\in\mathscr{U}(x),\subset\}$收敛于$x_0$。

另一方面，若在$A\backslash\{x_0\}$上有网S收敛于x_0，则S终于x_0的每个$\mathscr{T}$邻域，故x_0的每个邻域中必有异于x_0的S的点，即x_0的任一邻域U，必有$U\cap S\neq\phi$。而$U\cap S\subset U\cap A\backslash\{x_0\}$，故$x_0$是$A$的聚点。

定理2 设X是拓扑空间，A是X的子集，$x_0\in X$，则$x_0\in\overline{A}$，当且仅当A中有网S收敛于x_0。

证明 因$\overline{A}=A^d\cup A$。由定理1，A的每个聚点x，在A中有网收敛于x。对于A的点x，由x构成的网显然收敛于x，故$\overline{A}$的每点都是A中某个网的极限。反之，若A有网收敛于x_0，则x_0的每个邻域必与A相交，故$x_0\in A$的闭包。

推论 X的子集A是闭集，当且仅当A中没有网收敛于$\mathscr{C}A$的点。

定理3 拓扑空间X是T_2空间，当且仅当X中每个网至多收敛于一点。

证明 若X是T_2空间，$s\neq t$，$s,t\in X$，则有开集U,V使$s\in U$，$t\in V$，$U\cap V=\phi$。因一个网不能终于两个不相交集的每一个中，故X中没有网同时收敛于s及t。

若X不是T_2空间，则有$s\neq t$使s的每个邻域和t的每个邻域相交。$\mathscr{U}(s)$，$\mathscr{U}(t)$按关系"$\subset$"都是定向集。作直积$\mathscr{U}(s)$

$\times \mathscr{U}(t)$，规定

$$(T,U) \geqslant (V,W) \Longleftrightarrow T \subset V \text{ 且 } U \subset W.$$

显然，直积按关系"$\leqslant$"是定向集。对于每个$(T,U) \in \mathscr{U}(s) \times \mathscr{U}(t)$，因$T \cap U \neq \phi$，取$S_{(T,U)} \in T \cap U$。作成网

$$\{S_{(T,U)}, \mathscr{U}(s) \times \mathscr{U}(t), \leqslant\}$$

若$(T,U) \geqslant (V,W)$，则$S_{(T,U)} \in T \cap U \subset V \cap W$。故网

$$\{S_{(T,U)}, \mathscr{U}(s) \times \mathscr{U}(t), \leqslant\}$$

收敛于s及t。

证明中用到的方法是较为有用的。若$(D, \geqslant)$和$(E, >)$是定向集，在直积集$D \times E$上规定序关系$\gg$为

$$(d,e) \gg (f,g) \Longleftrightarrow d \geqslant f \text{ 且 } e > g.$$

则$(D \times E, \gg)$也是定向集，是D和E的积定向集。

积定向集的概念可推广于一般情形。

设$\{(E_\alpha, >_\alpha): \alpha \in D\}$是一族定向集，在直积集$P = \prod\limits_{\alpha \in D} E_\alpha$中，规定$x \geqslant y \Longleftrightarrow x_\alpha >_\alpha y_\alpha$，对每个$\alpha \in D$，则$(P, \geqslant)$是定向集。

实际上，若$x, y \in P$，则对每个$\alpha \in D$，在E_α中有元素z_α，使$z_\alpha >_\alpha x_\alpha$且$z_\alpha >_\alpha y_\alpha$。则$z = (z_\alpha: \alpha \in D) \in P$，在关系"$\leqslant$"之下满足$z \geqslant x, z \geqslant y$。故$(P, \geqslant)$是定向集。

直积定向集的一个重要的特殊情形是所有坐标集E_α是相等的，且所有关系$>_\alpha$也是相等的。这时将P也记作E^D。

定理 4 设D是定向集，对每个$\alpha \in D, E_\alpha$也是定向集，设

$$F = D \times \prod_{\alpha \in D} E_\alpha.$$

对每个$(\alpha, f) \in F$，令$R(\alpha, f) = (\alpha, f(\alpha))$。若对每个$\alpha \in D$，$\beta \in E_\alpha$，$S(\alpha, \beta)$是拓扑空间$X$的成分，则当

$$\lim_\alpha \lim_\beta S(\alpha, \beta) = s$$

存在时，$S\circ R$ 收敛于 s。

证明 设 $\lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta}S(\alpha,\beta)=s$，$U$ 为 s 的开邻域。只需指出存在 $(\alpha,f)\in F$，若 $(\gamma,g)\geqslant(\alpha,f)$，则 $S\circ R(\gamma,g)\in U$ 即可。

因 $\lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta}S(\alpha,\beta)=s$，故对应 U 在 D 中有 α_0，使当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，有 $\lim\limits_{\beta}S(\alpha,\beta)\in U$。对每个这样的 α，选择 $f(\alpha)\in E_\alpha$，使对所有的 E_α 中 $f(\alpha)$ 后的 β，$S(\alpha,\beta)\in U$。当 $\gamma\in D$，且 $\gamma<\alpha_0$，令 $f(\gamma)$ 为 E_γ 的任意元素。若 $(\gamma,g)\geqslant(\alpha_0,f)$，则 $\gamma\geqslant\alpha_0$，$g(\gamma)\geqslant f(\gamma)$，故 $S\circ R(\gamma,g)=S(\gamma,g(\gamma))\in U$。

设 S 为拓扑空间 X 的网，$x_0\in X$。x_0 是 S 的接触点（cluster point），当且仅当 S 经常在 x_0 的每个邻域中。

一个网可以有一个或许多个或没有接触点。如 $\{n: n\in N\}$ 在通常拓扑下没有接触点，而有理数序列有无限多接触点，所有实数都是它的接触点。收敛序列只有一个接触点，该点就是它的极限点。

若收敛网有唯一接触点，则该点就是它的极限点；反之仅有一个接触点的网却未必收敛。

定理 5 点 x_0 是网 S 的接触点，当且仅当 S 有子网收敛于 x_0。

证明 若 x_0 是网 S 的接触点，则 S 经常在 x_0 的每个邻域中，由 § 2 定理 4 知 S 有子网终于 $\mathscr{U}(x_0)$ 的每个成分。即有子网收敛于 x_0。

反之，若 x_0 不是 S 的接触点，则有 x_0 的邻域 U，使 S 不经常在 U 中，即 S 终于 $\mathscr{C}U$。故 S 的每个子网终于 $\mathscr{C}U$ 而不收敛于 x_0。

推论 设 X 是第一可数空间，则点 x_0 是序列 S 的接触点，当且仅当 S 有子序列收敛于 x_0。

定理 6 设 $\{S_\alpha, \alpha\in D, <\}$ 是拓扑空间 X 的网，对每个 $\alpha\in D$，令

$$A_\alpha=\{S_\beta: \beta>\alpha\},$$

则x_0是$\{S_\alpha, \alpha \in D, <\}$的接触点,当且仅当$x_0 \in \bigcap_{\alpha \in D} \overline{A_\alpha}$.

证明 若x_0是S的接触点，则S经常在x_0的任一邻域U_{x_0}中.即对任一$\alpha \in D$,有$A_\alpha \cap U_{x_0} \neq \phi$.故$x_0 \in \overline{A_\alpha}$, $\alpha \in D$. 亦即$x_0 \in \bigcap_{\alpha \in D} \overline{A_\alpha}$.

反之，若x_0不是S的接触点，则S不经常在x_0的某一邻域中. 即有U_{x_0}使S终于$\mathscr{C}U_{x_0}$. 即有β,使$A_\beta \subset \mathscr{C}U_{x_0}$. 亦即$A_\beta \cap U_{x_0} = \phi$. 故$x_0 \notin \overline{A_\beta}$.

定理7 拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$收敛于$x_0$，当且仅当对于$D$的任一共尾子集$D_1$，恒有

$$x_0 \in \overline{\{S_\alpha, \alpha \in D_1, \leqslant\}}.$$

证明 必要性. 对于D的任一共尾子集D_1和x_0的任一邻域U，只需证明

$$\{S_\alpha: \alpha \in D_1\} \cap U \neq \phi.$$

因$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\} \to x_0$，对应$U$有$\alpha_0 \in D$,使$\{S_\alpha: \alpha \geqslant \alpha_0\} \subset U$,又因$\{\alpha: \alpha \geqslant \alpha_0\} \cap D_1 \neq \phi$，故$[\{S_\alpha: \alpha \in D_1\} \cap U] \supset [\{S_\alpha: \alpha \in D_1\} \cap \{S_\alpha: \alpha \in D, \alpha \geqslant \alpha_0\}] = \{S_\alpha: \alpha \in D_1, \alpha \geqslant \alpha_0\} \neq \phi$.

充分性. 用反证法. 若条件成立而$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$不收敛于$x_0$,则有$x_0$的邻域$U$,使$D_1 = \{\alpha: \alpha \in D, S_\alpha \in U\}$不是$D$的等终子集. 由§2定理3知$D_2 = D \backslash D_1$是$D$的共尾子集. 有$\{S_\alpha: \alpha \in D_2\} \cap U = \phi$. 故$x_0 \notin \overline{\{S_\alpha, \alpha \in D_2, \leqslant\}}$，与条件矛盾.

定理8 设X，Y为拓扑空间，映射$f: X \to Y$是连续的，当且仅当在X中，若$\{S_\alpha: \alpha \in D, \leqslant\}$收敛于$x_0$，则在$Y$中$\{f(S_\alpha), \alpha \in D, \leqslant\}$收敛于$f(x_0)$.

证明 设f是连续映射. 若在X中S_α收敛于x_0，则由定理7，对于D的任一共尾子集D_1，必有$x_0 \in \overline{\{S_\alpha, \alpha \in D_1, \leqslant\}}$. 由$f$的连续性，$f(x_0) \in f(\overline{\{S_\alpha, \alpha \in D_1\}}) \subset \overline{f(S_\alpha, \alpha \in D_1)}$. 再由定理7知$f(S_\alpha)$收敛于$f(x_0)$.

反之，对于X的任意子集E，若$x_0 \in \overline{E}$,则由定理2知E中有网$\{S_\alpha\}$收敛于x_0. 由条件有$f(S_\alpha) \to f(x_0)$，$f(\{S_\alpha, \alpha \in D\})$

$\subset f(E)$。于是$f(x_0)\in\overline{f(E)}$。此即

$$f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}.$$

故 f 是连续的。

设$\mathfrak{F}$是集合X上的滤子，即 $\mathfrak{F}$ 是X的子集族。可以附以下标，写为：

$$\mathfrak{F}=\{A_\alpha:\alpha\in D\}.$$

在D上确定序关系为$\alpha>\alpha_1\Longleftrightarrow A_\alpha\subset A_{\alpha_1}$（假设当$\alpha\neq\alpha_1$时，$A_\alpha\neq A_{\alpha_1}$），则D为定向集。在定向集 D 上定义的网 $\{S_\alpha, \alpha\in D,\leqslant\}$满足$S_\alpha\in A_\alpha$，$\alpha\in D$，称为滤子 $\mathfrak{F}$导出的网（derived net）。

反之，设$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$是$X$上的任意网，令

$$\mathfrak{F}=\{A:S_\alpha\text{终于}A\}.$$

则 $\mathfrak{F}$是滤子，称之为由网$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$导出的滤子（derived filter）。

定理9 滤子$\mathfrak{F}$收敛于点x_0，当且仅当由$\mathfrak{F}$导出的网收敛于x_0点。

证明 设$\mathfrak{F}\to x_0$且$\mathfrak{F}=\{A_\alpha:\alpha\in D\}$。令 $\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$为$\mathfrak{F}$导出的网。即 $S_\alpha\in A_\alpha$，$\alpha\in D$。设U为x_0的邻域，则有$\alpha_0\in D$，使 $U=A_{\alpha_0}$。若$\alpha>\alpha_0$，则$A_\alpha\subset A_{\alpha_0}=U$，即 $S_\alpha\in U$，故$S_\alpha\to x_0$。

反之，设$\mathfrak{F}\nrightarrow x_0$，则对$x_0$的某个邻域$U$，对每个$\alpha\in D$，均有 $A_\alpha\not\subset U$，因此，对每个$\alpha\in D$，选取 $S_\alpha\in A_\alpha\setminus U$，作成网$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$，它不收敛于$x_0$点。

定理10 网 $\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 收敛于 x_0 点，当且仅当由$\{S_\alpha\}$导出的滤子收敛于x_0点。

证明 设$\mathfrak{F}$是由$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$导出的滤子，即

$$\mathfrak{F}=\{A:\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}\text{终于}A\}.$$

若$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$收敛于$x_0$，则对于 x_0的任一邻域U，$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$终于$U$。故$U\in\mathfrak{F}$。因此，$\mathfrak{F}\to x_0$。

反之，设 $\mathfrak{F}\to x_0$，则x_0的每个邻域U满足$U\in\mathfrak{F}$。因此$\{S_a, a\in D,\leqslant\}$终于$U$，故$\{S_a, a\in D,\leqslant\}$收敛于$x_0$点。

网和滤子的等价性首先由R.G.Bartle(1955)指出。

定理11 设X是第一可数空间，则

a．点x_0是集A的聚点，当且仅当$A\setminus\{x_0\}$有序列收敛于x_0；

b．集A是开集，当且仅当每个收敛于A的点的序列终于A；

c．若x_0是序列S的接触点，则S有子序列收敛于x_0。

证明 因X是第一可数空间，由第三章§5定理4知每点都有单调下降的可数邻域基．设$\{V_n: n\in N\}$是点x_0的可数邻域基，则对每个n，有$V_{n+1}\subset V_n$。对每个n选取点$S_n\in V_n\cap A\setminus\{x_0\}$，取得序列$\{S_n, n\in N\}$，显然它收敛于$x_0$。反之是明显的。a得证。

若A不是X的开子集，则$X\setminus A$有序列收敛于A的点。这个序列不终于A．反之是明显的，b得证。

设x_0是序列S的接触点，且$\{V_n, n\in N\}$是点x_0的基本邻域系，对每个n满足$V_{n+1}\subset V_n$。对每个$i\in N$，选取N_i，使得$N_i>i$，且$S_{N_i}\in V_i$．则$\{S_{N_i}, i\in N\}$是S的子序列，它收敛于x_0点。c得证。

【习　　题】

1．设Y是拓扑空间X的子空间，$\{S_a, a\in D,\leqslant\}$是$Y$中的网，则$S_a$在$Y$中收敛于$s_0\in Y$，当且仅当在$X$中，网$S_a$收敛于$s_0$。

2．拓扑空间X是T_1的，当且仅当若$S_a\to y$，且对所有$a\in D$，均有$S_a=x$，则$y=x$。

3．G是拓扑空间X的开集，当且仅当对于G的任意点x_0

和收敛于x_0的任意网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$，必有

$\{S_\alpha: \alpha \in D\} \cap G \neq \phi$.

4. F是拓扑空间X的闭集，当且仅当F中任意网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$，若$S_\alpha \to x_0$，则$x_0 \in F$.

5. 设E是拓扑空间X的任一子集，则

$E^\circ = \{x$:不存在$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\} \subset \mathscr{C}E$，使$S_\alpha \to x\}$.

6. $U \in \mathscr{U}(x_0)$，当且仅当若$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\} \to x_0$，则$\{S_\alpha: \alpha \in D\} \cap U \neq \phi$.

7. 伪度量空间(X,d)的网$\{S_\alpha, \alpha \in D, \leqslant\}$收敛于点$s$，当且仅当$\{d(S_\alpha, s), \alpha \in D, \leqslant\}$收敛于零.

§4 紧空间
(compact space)

关于度量空间，在第二章中曾讨论过紧空间. 同样，关于拓扑空间，紧空间也是重要的.

拓扑空间是紧(compact)的，当且仅当每个开覆盖有有限子覆盖.

拓扑空间的子集A是紧的，当且仅当关于相关拓扑，A是紧空间.

等价地，拓扑空间的子集A是紧的，当且仅当A在X中的每个开覆盖有有限子覆盖.

例1　有限点组成的拓扑空间为紧空间.

例2　离散拓扑空间X是紧空间，当且仅当X是有限集.

例3　在实数直线上，任意开区间不是紧的.

例4　紧度量空间作为拓扑空间是紧空间；密集拓扑空间也是紧空间.

为了用闭集描述紧性要用到§1提到的有有限交性质的集族. 应用de Morgan 公式容易得到下列定理:

定理1 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是紧的，当且仅当每个具有有限交性质的闭集族有非空交。

证明 若$\mathfrak{M}$为拓扑空间X的子集族，则根据de Morgan公式，有

$$X\sim\bigcup\{A:A\in\mathfrak{M}\}=\bigcap\{\mathscr{C}A:A\in\mathfrak{M}\}$$

故$\mathfrak{M}$是X的覆盖，当且仅当$\mathfrak{M}$的成分的补的交是空集。

于是X是紧的，当且仅当开集族$\mathfrak{M}$中若没有有限子族覆盖X，则$\mathfrak{M}$也不是X的覆盖，当且仅当具有有限交性质的闭集族的交不是空的。

推论 拓扑空间是紧的，当且仅当每个有有限交性质的集族其闭包的交不空。

定理2 拓扑空间X是紧的，当且仅当X的任一网有接触点。

证明 设$\{S_\alpha,\ \alpha\in D,\leqslant\}$是紧拓扑空间$X$的网。对每个$\alpha\in D$，令$A_\alpha=\{S_\beta:\beta>\alpha\}$。则$\{A_\alpha:\alpha\in D\}$按$D$的序关系是定向集，故集族$\{A_\alpha:\alpha\in D\}$具有有限交性质。因之$\{\overline{A}_\alpha:\alpha\in D\}$也具有有限交性质。因$X$是紧空间，故有点$x_0$属于每个$\overline{A}_\alpha$。根据§3定理6，$x_0$是网$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$的接触点。

反之，设X是每个网都有接触点的拓扑空间，$\mathfrak{M}$是具有有限交性质的X的闭子集族。令$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{M}$的成分的所有有限交的族，则$\mathfrak{N}$也具有有限交性质，且$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$。今证明

$$\bigcap\{B:B\in\mathfrak{N}\}\neq\phi$$

即可。

首先指出$(\mathfrak{N},\subset)$是定向集。由作法，若B_1，$B_2\in\mathfrak{N}$，则$B_1\cap B_2\in\mathfrak{N}$。按$B_1\geqslant B_2\Longleftrightarrow B_1\subset B_2$的序关系，$(\mathfrak{N},\subset)$是定向集。对任意$B\in\mathfrak{N}$，取$S_B\in B$，作成网$\{S_B:B\in\mathfrak{N},\subset\}$。由条件$\{S_B:B\in\mathfrak{N},\subset\}$有接触点$x_0$。若$B_1,B_2\in\mathfrak{N}$，且$B_1\subset B_2$，则$S_{B_1}\in B_1\subset B_2$，于是网$\{S_B,\ B\in\mathfrak{N},\ \subset\}$终于任一$B\in\mathfrak{N}$。故接触点$x_0$必属于闭集$B\in\mathfrak{N}$，即对任一$B\in\mathfrak{N}$，均有$x_0\in B$。故

$x_0 \in \bigcap_{B \in \mathfrak{N}} B \neq \phi$.

推论 拓扑空间X是紧的，当且仅当X的每个网有子网收敛于X的某点。

由§3定理5和本定理直接推得。

定理3 设X为拓扑空间，下列条件等价：

a．X是紧空间；

b．X的任意滤子必有接触点；

c．X的任意极大滤子$\mathfrak{U}$含有某点x的邻域滤子$\mathscr{U}(x)$，即$\mathfrak{U}$收敛于x。

证明 a⇒b 设$\mathfrak{F}$是紧拓扑空间X的滤子，则

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\}$$

是具有有限交性质的闭集族．由定理1 $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F} \neq \phi$．即有$x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F}$．故$x$为$\mathfrak{F}$的接触点．

b⇒c 因X的任意滤子都有接触点，故任意极大滤子$\mathfrak{U}$也必有接触点x_0。由§1定理10，$\mathfrak{U}$收敛于x_0。

c⇒a 设X的任意极大滤子都收敛，集族$\mathfrak{M}$是X的开覆盖．若$\mathfrak{M}$没有有限子覆盖，则

$$\mathfrak{F}_1 = \{\mathscr{C}U : U \in \mathfrak{M}\}$$

具有有限交性质．由§1定理4知可构造极大滤子$\mathfrak{U}$含有$\mathfrak{F}_1$为子族．由条件有$x_0 \notin X$，使$\mathfrak{U} \to x_0$。故x_0是$\mathfrak{U}$的接触点，对每个$F \in \mathfrak{U}$，有$x_0 \in \overline{F}$。于是对每个$U \in \mathfrak{M}$。

$$x_0 \in \overline{\mathscr{C}U} = \mathscr{C}U.$$

但这和$\mathfrak{M}$是X的覆盖矛盾．故$\mathfrak{M}$必有有限子族覆盖X，即X是紧空间．

定理4 (Alexander) 关于拓扑空间$(X, \mathscr{T})$，下列条件等价：

a．X是紧空间；

b．设$\mathscr{S}$是$\mathscr{T}$的子基，若$\{G_\lambda : \lambda \in D, G_\lambda \in \mathscr{S}\}$是$X$的开覆盖，则$\{G_\lambda : \lambda \in D, G_\lambda \in \mathscr{S}\}$有有限子覆盖。

c．设$\mathscr{S}$是$\mathscr{T}$的子基，若闭集族$\mathfrak{S}_1=\{F_\lambda: \lambda\in D, \mathscr{C}F_\lambda\in\mathscr{S}\}$具有有限交性质，则

$$\bigcap_{\lambda\in D}F_\lambda\neq\phi.$$

证明　a ⇒ b 是显然的．b ⇒ c 应用de Morgan 公式直接得出．只需证c ⇒ a．

因$\mathfrak{S}_1$具有有限交性质，故$\mathfrak{S}_1$是集合X上的滤子子基．由§1定理1知X上含$\mathfrak{S}_1$的滤子$\mathfrak{S}$存在．由§1定理4知含$\mathfrak{S}$的极大滤子$\mathfrak{U}$存在．由条件c，$\bigcap\limits_{F_\lambda\in\mathfrak{S}_1}F_\lambda\neq\phi$．令$E=\bigcap\limits_{F_\lambda\in\mathfrak{S}_1}F_\lambda$．只需证明若$x_0\in E$，则对任一$F\in\mathfrak{U}$，有$x_0\in\overline{F}$即可．

今设对某一$F\in\mathfrak{U}$，$x_0\notin\overline{F}$，于是因$\mathscr{S}$是子基，有$G_1,\cdots,G_n\in\mathscr{S}$，使

$$x_0\in G_1\cap G_2\cap\cdots\cap G_n\subset\mathscr{C}\overline{F}.$$

若令$F_i=\mathscr{C}G_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，则$F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_n\supset\overline{F}$．因$\mathfrak{U}$是滤子，由$F\in\mathfrak{U}$导出$F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_n\in\mathfrak{U}$．又因$\mathfrak{U}$是极大滤子，由§1定理5知必有某$F_i\in\mathfrak{U}$．因$F_i=\mathscr{C}G_i$，$G_i\in\mathscr{S}$，故$F_i\in\mathfrak{S}_1$．因$x_0\in G_i$，故$x_0\notin F_i$．这与$x_0\in E=\bigcap\limits_{F_\lambda\in\mathfrak{S}_1}F_\lambda$矛盾．因此对于所有的$F\in\mathfrak{U}$，必有$x_0\in\overline{F}$．

定理5　紧拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的任意非空闭子集E是紧集．

证明　设$\{G_\lambda:\lambda\in D\}$是$E$的任一开覆盖，则$\mathscr{C}E$及$\{G_\lambda:\lambda\in D\}$是$X$的开覆盖．因$X$是紧空间，故必有有限子覆盖，设为$G_{\lambda_1},G_{\lambda_2},\cdots,G_{\lambda_n},\mathscr{C}E$，则$G_{\lambda_1},\cdots G_{\lambda_n}$是$E$的覆盖，而$E$是紧的．

拓扑空间的紧子集未必是闭的，如密集空间的任一非空子集都是紧的但未必是闭集．

定理6　若T_2空间$(X,\mathscr{T})$的子集E是紧的，则E为X的闭集．

证明　只需指出$\mathscr{C}E$是开集．任取$x\in\mathscr{C}E$，因X是T_2空间，故对于E的任意点y，有开集U_y，V_y，使$x\in U_y$，$y\in V_y$，

$U_y \cap V_y = \phi$。于是这种V_y的全体是E的开覆盖。因E是紧的，故有有限个点$y_1, y_2, \cdots, y_n$，使$\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supset E$。令$\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} = U$，则$x \in U$，且$U \cap E \subset U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \phi$。故$x$是$\mathscr{C}E$的内点，而$\mathscr{C}E$为开集。

定理 7 紧集的连续象是紧集。

证明 设$f: X \to Y$为拓扑空间X到拓扑空间Y的连续映射。E是X的紧集，往证$f(E)$是紧集。设$\{G_\lambda: \lambda \in D\}$是$f(E)$的任意开覆盖。因$f$是连续的，故$\{f^{-1}(G_\lambda): \lambda \in D\}$是$E$的开覆盖。因$E$是紧的，故其中有有限子覆盖。即有$\{f^{-1}(G_{\lambda_i}): i = 1, 2, \cdots, n\}$是$E$的有限开覆盖。故由

$$f \circ f^{-1}(G_\lambda) \subset G_\lambda,$$

有$f(E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}$。即$f(E)$是紧集。

推论 1 设X为紧拓扑空间，Y为T_2空间，若$f: X \to Y$为连续映射，则$f(X)$为Y的闭集。

推论 2 紧拓扑空间X到T_2空间Y的连续映射是闭映射。

推论 3 若紧拓扑空间X与T_2空间Y的子空间E同胚，则E为Y的闭子集。

由推论 2 又可推得下列定理。

定理 8 设$(X, \mathscr{T})$是紧拓扑空间，$(Y, \mathscr{U})$是T_2空间，$f: X \to Y$是连续的双射，则f^{-1}也是连续的，$(X, \mathscr{T})$和$(Y, \mathscr{U})$是同胚的。

实际上，连续的双射是闭映射时为同胚映射。

定理 9 若A和B是T_2空间X的不相交紧子集，则有A和B的不相交邻域。

证明 象定理 6 的证明那样，对每点$x \in A$，有x的邻域和B的邻域是不相交的。故x有邻域U_x，使$\overline{U_x} \cap B = \phi$。这

种$\{U_x: x\in A\}$作成A的开覆盖．因A是紧集，故有有限个$U_1,\cdots,U_n$满足

$$V=\bigcup_{i=1}^{n}U_i\supset A,\ \overline{U}_i\cap B=\phi,i=1,2,\cdots,n.$$ 则$\mathscr{C}\overline{V}$是和V不相交的B的邻域．

推论 紧T_2空间是正规空间．

定理10 若X是T_3空间，A为X的紧子集，U是A的邻域，则有A的闭邻域V，使$V\subset U$．

证明 对每个$x\in A$，因X是T_3的，故有x的开邻域W_x，使$\overline{W}_x\subset U$．这种W_x作成A的开覆盖，由A的紧性，有有限个$W_1,W_2,\cdots,W_n$，使

$$\bigcup_{i=1}^{n}W_i\supset A,\text{且}\overline{W}_i\subset U,i=1,2,\cdots,n,$$

令$V=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{W}_i$，则$V$是要求的$A$的闭邻域．

推论 每个紧T_3空间是T_4空间．

定理11 若X为完全正则空间，A为X的紧子集，U为A的邻域，则有X到闭区间$[0,1]$的连续函数，使得f在A上为1，而在$\mathscr{C}U$上为零．

证明 对每个$x\in A$，有连续函数g_x，在x点为1而在$\mathscr{C}U$上为0．集合

$$H_x=\{y: g_x(y)>\frac{1}{2}\}$$

在X中是开集．因此，由

$$h_x(y)=\min\{2g_x(y),1\}$$

定义的函数h是值在$[0,1]$中，在$\mathscr{C}U$上是0，在x的邻域H_x上是1的连续函数．集族

$$\{H_x: x\in A\}$$

作成紧集A的开覆盖．因A是紧集，故有有限覆盖$\{H_1,\cdots,$

$H_s\}$. 相对应的有连续函数$h_1,h_2,\cdots,h_n$，使$h_i^{-1}[1]\supset H_i$，$A\subset\bigcup\{h_i^{-1}[1]:h=1,2,\cdots,n\}$，且每个$h_i$在$\mathscr{C}U$上为0。于是令

$$f(x)=\max\{h_i(x):i=1,2,\cdots,n\}$$

即为所要求的函数。

【习　　题】

1. 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$为拓扑空间X的紧子集，则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$是X的紧子集。

2. 设$(X,\mathscr{T}_1)$是紧拓扑空间，$(X,\mathscr{T}_2)$是T_2空间。若$\mathscr{T}_2$比$\mathscr{T}_1$弱，则$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$是一致的。

3. 拓扑空间的二紧子集的交可以不是紧的，但闭且紧的子集的任意交是闭且紧的。

4. 拓扑空间的紧子集的闭包可以不是紧的，而T_3空间的紧子集的闭包是紧的。

5. 设X为T_2空间，若x为X的任一点，A为不含x的X的紧子集，则x与A有不相交的邻域。

6. T_2空间的二紧子集的交是紧的。

7. T_2紧空间X的各点有紧基本邻域系。

8. T_2紧空间X的闭集F的紧邻域全体的交是F。

9. T_2紧空间X的子集K是紧的，当且仅当K是闭集。

10. 设X，Y为T_2空间，$f:X\to Y$为连续映射。$\{K_n, n\in N\}$为X的紧集的单调减少列，则

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}f(K_n).$$

11. 设Ω是T_2空间X的紧子集族，使Ω的成分的有限交是连通的，则

$$\bigcap\{A:A\in\Omega\}$$

也是连通的。

12．设$\mathfrak{Q}$为闭紧子集族，U是开集，满足

$$\bigcap\{A:A\in\mathfrak{Q}\}\subset U,$$

则$\mathfrak{Q}$有有限子族$\mathfrak{M}$，使

$$\bigcap\{A:A\in\mathfrak{M}\}\subset U.$$

13．指出在任意非空集X上有紧 T_2 拓扑。

§5　弱于紧性的几种空间

紧性是一种重要的拓扑性质，有着重要的应用。近些年来许多数学家讨论了各种弱于紧性的各种空间，本节只讨论一部分较重要的空间。

拓扑空间X是Lindelöf 空间，当且仅当X的任意开覆盖有可数子覆盖。

定理1　第二可数空间X是Lindelöf空间。

证明　设$\mathscr{B}=\{G_n:n\in N\}$是X的可数基，对于X的任意开覆盖

$$\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in D\},$$

因$\mathscr{U}$的每个成分是$\mathscr{B}$的成分的并，故$\mathscr{U}$的子族

$$\mathscr{B}_1=\{G:G\in\mathscr{B},\text{有}U\in\mathscr{U},\text{使}G\subset U\}$$

也构成X的覆盖。对于$\mathscr{B}_1$的每个成分，在$\mathscr{U}$中可选取一个包含它的成分，于是可取到$\mathscr{U}$的一个可数子族$\mathscr{U}_1$。因$\mathscr{B}_1$覆盖X，故$\mathscr{U}_1$也覆盖X。因此$\mathscr{U}$有可数子覆盖。

Lindelöf 空间未必是第二可数空间，也未必是第一可数空间。如不可列集构成的单点闭拓扑空间。

第一可数空间也未必是 Lindelöf 空间。如不可列集构成的离散拓扑空间。

Lindelöf 空间未必是可分空间。如不可列集的可列集补开

拓扑空间。

可分空间也未必是Lindelöf空间。

拓扑空间X称为**可列紧的或可数紧**(countable compact)的，当且仅当X的任意可数开覆盖有有限子覆盖。

拓扑空间X称为**序列紧**(sequentially compact)的，当且仅当X的任意点列含有收敛子列。

拓扑空间X称为**子集紧**(subset compact)的，当且仅当任一无限子集必有聚点.

序列紧空间和紧空间是互相独立的。

紧空间必是可列紧空间，反之未必。

定理1直接可推得下述结果。

推论 第二可数的可列紧空间是紧空间。

定理2 可列紧空间必是子集紧空间。

证明 X若有无限子集H不具有聚点，取H的可数无限子集$A=\{a_n: n\in N\}$，因$H^d=\phi$，故$A^d=\phi$。每点a_n必有开邻域U_{a_n}，使$U_{a_n}\cap A=\{a_n\}$。于是$\mathscr{C}A$及$\{U_{a_n}: n\in N\}$作成X的可列开覆盖。由条件X必有有限子覆盖$\{\mathscr{C}A, U_{a_1},\cdots,U_{a_n}\}$。故$U_{a_1},\cdots,U_{a_n}$是$A$的覆盖。但$\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}\right)\cap A$是有限点集，而$\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}\right)\cap A=A$是无限点集。矛盾。

定理3 拓扑空间X是可列紧的，当且仅当非空闭集单调下降列有非空交。

证明 设$\{F_n: n\in N\}$是X的非空闭集单调下降列，若$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\phi$，令$U_n=\mathscr{C}F_n$，则$\{U_n: n\in N\}$是$X$的开覆盖。由$X$的可列紧性，其中有有限子覆盖，$\{U_{n_1},\cdots,U_{n_k}\}$。不妨设$n_1<n_2<\cdots<n_k$。$\bigcup_{i=1}^{k}U_{n_i}=U_{n_k}$，故$U_{n_k}=X$而$F_{n_k}=\phi$。矛盾。

反之，设 $\{U_n: n\in N\}$ 是X的可数开覆盖，令 $F_n=X-\bigcup_{i=1}^{n}U_i$，则$\{F_n: n\in N\}$是单调下降的闭集列。因$\{U_n\}$是$X$的开覆盖，故$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\phi$。由条件必有$n\in N$，使$F_n=\phi$。即$X=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$，故可数开覆盖有有限子覆盖。

定理 4 序列紧空间X必是可列紧空间。

证明 设

$$\mathscr{U}=\{U_i: i\in N\}$$

为序列紧空间X的任意可列开覆盖，令

$$G_n=U_1\cup\cdots\cup U_n,\quad n\in N.$$

则$G_n\subset G_{n+1}(n\in N)$，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$。如果$\mathscr{U}$没有有限子覆盖，则有$x_n\in\mathscr{C}G_n$，得到序列$\{x_n, n\in N\}$。因$X$是序列紧的，故$\{x_n, n\in N\}$有收敛子列$\{x_{n_k}, K\in N\}$，设$x_{n_k}\to x_0$。因$\mathscr{U}$是$X$的开覆盖，必有自然数$m$，使$x_0\in U_m$。因$x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$，故有自然数$p$，$p>m$，$x_p\in U_m$。而$U_m\subset G_p$这与$x_p\in\mathscr{C}G_p$的取法矛盾。故$\mathscr{U}$具有有限子覆盖，而$X$是可列紧的。

定理 5 第一可数空间X若为可列紧空间，则为序列紧空间。

证明 设$\{x_n, n\in N\}$为X的任意序列。令

$$F_n=\overline{\{x_m: m\geqslant n\}},\quad n\in N,$$

则$F_{n+1}\subset F_n(n\in N)$。故$\{F_n, n\in N\}$是非空闭集单调下降列。由定理 3，因$X$是可列紧空间，故$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\phi$。设$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$，因$X$是第一可数空间，可设$\{U_n, n\in N\}$为$x_0$的基本邻域系，且满足$U_{n+1}\subset U_n(n\in N)$。因$x_0\in F_n(n\in N)$，故有自然数列$m_1<m_2<\cdots<m_i<\cdots$，使$x_{m_i}\in U_i$。$\{x_{m_i}, i\in N\}$是$\{x_n,$

$n\in N\}$的子列且收敛于x_0。

定理6 第一可数子集紧的T_1空间必是序列紧空间。

证明 设$\{x_n,n\in N\}$是X的任一序列，如果$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k},k\in N\}$的点全相同，则这个子序列收敛。所以可以假设$\{x_n,n\in N\}$是由不同的点构成的，并不影响讨论的一般性。考虑无限子集$A=\{x_n\}$。由条件的子集紧性，A有聚点$x_0\in X$。由§3定理11知$A\setminus\{x_0\}$中有序列$\{z_k,k\in N\}$收敛于x_0。因$\{z_k,k\in N\}\subset A=\{x_n,n\in N\}$，故$\{z_k,k\in N\}$有子列也是$\{x_n,n\in N\}$的子列收敛于$x_0$。

定理7 T_1子集紧空间X是可列紧空间。

证明 若X不是可列紧空间，则有可数无限覆盖$\{U_n,n\in N\}$不含有有限子覆盖。对每个n，令$F_n=X\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\right)$，则$F_n$为非空闭集，在$F_n$中任取一点$x_n$，作子集$A=\{x_n,n\in N\}$。

若A是无限集，则由子集紧性，A有聚点x_0。由T_1性，x_0的每个邻域必包含A的无限多点。故x_0是$A_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$的聚点。但$A_n\subset F_n$，故$x_0\in F_n(n\in N)$，因而$x_0\overline{\in}U_n(n\in N)$，这与$\{U_n,n\in N\}$是覆盖矛盾。故$A$必须是有限集。

若A是有限集，则存在A的一点a与自然数序列$\{n_k:k\in N\}$使$x_{n_k}=a$。但根据F_n与x_n的作法，$(F_n\supset F_{n+1}$与$x_n\in F_n)$，对每个n，$a\in F_n$这与$\{U_n,n\in N\}$是X的覆盖矛盾。

例 设N为自然数集，$B_n=\{2n-1,2n\}$，则以$\mathscr{B}=\{B_n,n\in N\}$为$N$的拓扑基确定$N$为拓扑空间。

显然N不是T_1空间。

N是子集紧空间。事实上，对于每一个自然数n，点$2n$是单点集$\{2n-1\}$的聚点。$2n-1$也是单点集$\{2n\}$的聚点。故N的每一非空子集必有聚点。即N是子集紧空间。

N不是可列紧空间。实际上，$\mathscr{B}$是X的可数开覆盖，并不

含有有限子覆盖.

N也不是序列紧空间，如序列 $\{n, n\in N\}$ 不含有收敛子列.

由上述诸定理自然推得下述结果.

定理 8 若X是第二可数 T_1 空间，则下述诸命题等价：

a．X是紧空间；

b．X是可列紧空间；

c．X是序列紧空间；

d．X是子集紧空间.

点x_0是子集A的 ω-聚点(ω-accumulation point)，当且仅当x_0的每个邻域皆含有A的无限多个点.

显然点集A的ω-聚点是A的聚点. 反之，若X是T_1空间，则A的聚点必是A的ω-聚点.

定理 9 拓扑空间X的每个序列有接触点，当且仅当每个无限集有ω-聚点.

证明 设X的每个序列有接触点，A为X的无限子集，则A含有由不同点组成的序列$\{x_n\}$. 由条件$\{x_n\}$有接触点x_0，则$\{x_n\}$必经常在x_0的任一邻域中. 故x_0的任意邻域必含有$\{x_n, n\in N\}$的无限多点. 即x_0是A的ω-聚点.

反之，设X的任一无限子集有ω-聚点，$\{x_n, n\in N\}$为X的任一序列. 若序列的值域是有限集，则必有$x_0\in X$，及无限多个n，使$x_n=x_0$. 故x_0是$\{x_n, n\in N\}$的接触点. 若序列的值域是无限集A，则集A的ω-聚点即序列$\{x_n, n\in N\}$的接触点.

设X为第一可数空间，由§3定理5的推论知，X的每个序列有接触点，当且仅当X的每个序列有收敛子列. 故当X为第一可数空间时，序列紧性可用ω-聚点刻画.

【习　　题】

1．空间是可列紧，当且仅当每个序列有接触点．

2．Lindelöf 空间的连续象是Lindelöf空间．

3．度量空间是第二可数的，当且仅当它是Lindelöf 空间．

4．子集紧空间的任意闭子空间也是子集紧空间．

5．Lindelöf 正则空间是正规空间．

6．X是可列紧空间，当且仅当具有有限交性质的可列闭集族的交不空．

7．小于第一不可数序数ω_1的所有序数的集合Ω_0关于序拓扑是T_2空间，是第一可数的序列紧空间，但不是紧空间．

8．试讨论下列诸性质在连续映射下是否保持不变？

a．序列紧； b．可列紧； c．子集紧．

9．设X是拓扑空间，它的子空间都是Lindelöf 空间，A是不可数子集．

$$B=\{x\in A:对任一U\in\mathscr{U}(x),U\cap A=不可数集\}.$$

则$A\backslash B$是可数集且B的点的每一邻域含有B的不可数多个点．

10．紧空间的F_σ子集是Lindelöf空间．

11．序列紧（子集紧）空间的闭子集是序列紧（子集紧）的；序列紧的有限并是序列紧的．

§6　局部紧空间、仿紧空间

(locally compact space、paracompact space)

拓扑空间X称为局部紧空间(locally compact space)，当且仅当对每一个$x\in X$，存在$U\in\mathscr{U}(x)$，使得U是紧的．

紧空间都是局部紧空间．

局部紧空间的闭子空间也是局部紧空间．

离散空间是局部紧空间.

具有通常拓扑的实直线是局部紧的但不是紧空间.

定理1 $T_2(T_3)$局部紧空间X的每点有闭紧邻域基.

证明 当X为T_3空间时，设$x\in X$,C_x为x的紧邻域，对任一$U_x\in\mathscr{U}(x)$,则$W_x=C_x\cap U_x\in\mathscr{U}(x)$.由$T_3$性，有闭邻域$V_x$，使$V_x\subset W_x$. 因$V_x$是$C_x$的闭子集,而$C_x$是紧集,所以$V_x$是紧集. 故每点有闭紧邻域基.

当X为T_2空间时，设$x\in X$，C_x为x的紧邻域，对任意$U_x\in\mathscr{U}(x)$,令$W_x=C_x\cap U_x$,则$\overline{W}_x\subset C_x$,且$\overline{W}_x$是紧$T_2$的,由§4定理9的推论知$\overline{W}_x$是正规的，也是正则的. 对应$x$和$W_x$有$V_x$，使$x\in V_x\subset\overline{V}_x\subset W_x$.因$\overline{V}_x\subset C_x$，故$\overline{V}_x$是$x$的闭紧邻域. 即每点有闭紧邻域基.

定理2 若U为T_3局部紧拓扑空间X的闭紧子集A的邻域，则有A的闭紧邻域V，使$A\subset V\subset U$. 且X到闭单位区间有连续函数f，使得f在A上为0而在$\mathscr{C}V$上为1.

证明 对于A的任一点x，有邻域W_x，它是U的闭紧子集. 因A是紧的，故

$$\{W_x : x\in A\}$$

中有A的有限覆盖. 设V是它们的并集，则V是A的闭紧邻域. 因X是T_3空间，故V是T_3紧的. 由§4定理10的推论知V也是T_4空间. 由第四章§3定理2知有V到闭单位区间的连续函数g，使得g在A上为0,在$V\backslash V^\circ$上为1. 令f在$\mathscr{C}V$上为1，在V上为g，因V°和$\mathscr{C}V$是分离的，且f在V及$\mathscr{C}V^\circ$上是连续的，由第四章§2习题6知f在X上是连续的.

推论 每个局部紧T_3拓扑空间是完全正则的. 且每个局部紧T_2空间是Тихонов空间.

局部紧空间的连续象未必是局部紧的.

例1 设$I:(X,\mathscr{T}_1)\to(X,\mathscr{T}_2)$为离散空间到非局部紧拓扑空间的恒等映射. I是连续映射，$I(X)$不是局部紧的.

若$f: X \to Y$是开且连续的，则点的紧邻域的象是象点的紧邻域．故局部紧空间的开连续象是局部紧的．

设X为集合，$\mathscr{U}=\{U_\alpha: \alpha \in A\}$，$\mathscr{V}=\{V_\beta: \beta \in B\}$是$X$的两个子集族，$\mathscr{U}$细分(refine)$\mathscr{V}$或$\mathscr{U}$是$\mathscr{V}$的加细（refinement），当且仅当存在$\varphi: A \to B$，使若$\alpha \in A$，$\varphi(\alpha)=\beta$，则$U_\alpha \subset V_\beta$．这时写做$\mathscr{U}<\mathscr{V}$．$\varphi$称为加细映射(refinement mapping)．特别地，当$A=B$，I_A是加细映射时，称$\mathscr{U}$为$\mathscr{V}$的一一加细．

设$\mathscr{U}$是拓扑空间X的子集族，$\mathscr{U}$称为局部有限的(locally finite)，当且仅当对任意点$x \in X$，有x的邻域V存在，使$V \cap U_\alpha \neq \phi$的$\mathscr{U}$的成分$U_\alpha$只有有限个．称$\mathscr{U}$为星有限(star finite)的，对任意$U_\alpha \in \mathscr{U}$，使$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$的$\mathscr{U}$的成分$U_\beta$只有有限个．

当$\mathscr{U}$为开覆盖时，星有限当然是局部有限的．

拓扑空间X称为仿紧空间(paracompact space)，当且仅当X的任意开覆盖有局部有限的开覆盖加细．

紧空间显然是仿紧空间．反之仿紧空间未必是紧空间，有无限多点的离散空间就是非紧的仿紧空间．

定理 3 （Dieudonné）仿紧T_2空间X是正规空间．

证明 首先证明X是正则空间．取X的任一点x及x的开邻域U．因X是T_2的，对于$y \in \mathscr{C}U$，有y的开邻域V_y，使$y \in V_y$，$x \notin \overline{V}_y$．开集族

$$\{U, V_y: y \in \mathscr{C}U\}$$

作成X的开覆盖．由假定有X的局部有限开覆盖：$\{U, W_y: y \in \mathscr{C}U\}$，使$W_y=\phi$或$W_y \subset V_y$．令$G=\bigcup\limits_{y \in \mathscr{C}U} W_y$，则$G$是开集，且$G \cup U=X$．

$A=\bigcup\limits_{y \in \mathscr{C}U} \overline{W}_y$ 是X的闭集．实际上，设$z \in \overline{A}$，由局部有限性，取z的邻域V，使

$$V \cap W_y \neq \phi$$

的W_y是有限个．则$A\cap V=(\overline{W}_{y_1}\cup\cdots\cup\overline{W}_{y_n})\cap V=\bigcup_{i=1}^{n}(\overline{W}_{y_i}$

$\cap V)$．这时因$\overline{A}=(\overline{A\cap V})\cup(\overline{A\setminus V})$，而$V\in\mathscr{U}(z)$，$z\notin$

$\overline{A\setminus V}$，故$z\in\overline{A\cap V}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{(W_{y_i}\cup V)}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overline{W}_{y_i}\subset A$．从而$A$

为X的闭集．于是$A=\overline{G}$．因$\overline{W}_y\subset\overline{V}_y$，故$x\notin A$．从而$x\in$
$\mathscr{C}A\subset\overline{\mathscr{C}A}=\mathscr{C}G\subset U$．即$X$是正则空间．

其次，设A_1，A_2为X的闭集，$A_1\cap A_2=\phi$．从而对$G_1=\mathscr{C}A_1,G_2=\mathscr{C}A_2$，有$X=G_1\cup G_2$．因$X$是正则的，对于$X$的各点$x$，有开邻域$V_x$，使$\overline{V}_x\subset G_1$，或$\overline{V}_x\subset G_2$．$\{V_x,x\in X\}$是$X$的开覆盖．由假定有开邻域$W_x$，使$W_x=\phi$或$W_x\subset V_x$，而$\{W_x:x\in X\}$是$X$的局部有限覆盖．令

$$V_1=\cup\{W_x:\overline{W}_x\subset G_1\},\ V_2=\cup\{W_x:\overline{W}_x\subset G_2\}.$$

则V_1，V_2为开集且$X=V_1\cup V_2$．又由$\{W_x:x\in X\}$是局部有限的，故$\overline{V}_1=\cup\{\overline{W}_x:\overline{W}_x\subset G_1\}$，$\overline{V}_2=\cup\{\overline{W}_x:\overline{W}_x\subset G_2\}$．于是$\overline{V}_1\subset G_1$，$\overline{V}_2\subset G_2$，令$U_1=\mathscr{C}\overline{V_2}$，$U_2=\mathscr{C}\overline{V}_1$，则它们满足

$$A_1\subset U_1,\ A_2\subset U_2,\ U_1\cap U_2=\phi.$$

因此，X是正规空间．

定理4 仿紧T_1空间X是紧的，当且紧当X是可列紧的．

证明 设X是仿紧T_1空间但不是紧空间，则X有开覆盖$\mathfrak{M}$不含有有限子覆盖．因X是仿紧的，故$\mathfrak{M}$有局部有限开加细$\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$也没有有限子覆盖．故可选取$\mathscr{U}$的序列$V_1,V_2,\cdots$使

$$V_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}V_j\neq\phi,\ i=1,2,\cdots$$

对每个i，取点$x_i\in V_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}V_j$，则由$\mathscr{U}$的局部有限性和$X$的$T_1$性推得$\{x_j:j=i,i+1,\cdots\}$没有聚点．令

$$W_i=X\setminus\bigcup_{j\geq i}\{x_j\},$$

则$\{W_i:i\in N\}$构成X的可列开覆盖．它没有有限子覆盖，于

是X不是可列紧的。反之是显然的。

拓扑空间X称为伪紧空间(pseudo compact space)，当且仅当X上每个实值连续函数是有界的。

定理 5 可列紧空间是伪紧空间。

证明 设f为可列紧空间上的连续函数，设

$$U_i=\{x:|f(x)|<i\},i=1,2,\cdots,$$

则做出X的可数开覆盖。由空间的可列紧性，其中有有限子覆盖，设

$$U_{n_1},\cdots,U_{n_k}$$

是X的覆盖，则

$$|f(x)|<\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}.$$

故X是伪紧的。

定理 6 T_4伪紧空间是可列紧空间。

证明 假设X不是可列紧空间，则存在可列开覆盖$\{U_i: i\in N\}$不含有有限子覆盖。选取点

$$x_i\in X\setminus\bigcup_{j=1}^{i}U_j,\qquad i=1,2,\cdots,$$

则取得点列$\{x_i, i\in N\}$不含有收敛子列。于是集

$$P=\{x_i: i\in N\}$$

是X的闭集。由

$$f(x_i)=i,\qquad i=1,2,\cdots$$

确定P上的连续函数f。由第四章§3定理5，f可扩张为X上的连续函数φ，显然φ是无界函数，即X不是伪紧空间。

综合前述诸定理有

定理 7 对于伪紧T_2第一可数空间，下列四条件等价。

a．紧性；b．序列紧性；c．可列紧性；d．伪紧性。

关于弱紧性的讨论，由于各学科的需要，从不同背景出发，近年来讨论了各种类型紧性．诸如点有限仿紧(pointwise finite paracompact)，亦称弱仿紧(weaker paracompact)，或亚仿

紧 (metaparacompact)；强仿紧(strongly paracompact)；可列仿紧 (countable paracompact)；σ-紧 (σ-compact)；二进紧 (dyadic compact)；准紧(precompact)；实紧(real compact)或Q空间；缘紧(peripherally compact)；σ-仿紧(σ-paracompact)；次仿紧 (subparacompact)；半紧(hemicompact)；超紧 (supercompact)；元紧 (metacompact)；k-紧 (k-compact)；链紧 (chain compact)；初始$\mathfrak{M}$紧 (initial $\mathfrak{M}$-compact)；全初始$\mathfrak{M}$紧(totally initial $\mathfrak{M}$-compact)；[a b]链紧([a,b]chain compact)；H-闭 (H-closed)；弱紧 (lightly compact)；完全仿紧 (completely paracompact)；全仿紧(hereditarily paracompact)；σ-强仿紧(σ-strongly paracompact)；$\mathfrak{M}$-强(弱)仿紧($\mathfrak{M}$-strongly (weaker)paracompact)；$\aleph_1$-紧 ($\aleph_1$-compact)；终紧 (finally compact)；弱可列紧(weakly countably compact)；极限点紧 (limit point compact)；σ-局部紧 (σ-locally compact)；强局部紧(strongly locally compact)等。

【习　　题】

1．设Y为T_2空间X的稠子集．若Y为局部紧的，则Y为X的开子集．

2．度量空间是仿紧空间 (Stone定理)．

3．设X为仿紧空间，试证X的闭子集A作为子空间也是仿紧空间．

4．仿紧T_2空间X的F_σ子集H是仿紧的．仿紧T_2空间X的闭连续象也是仿紧的．

5．正则 Lindelöf 空间是仿紧空间(Morita 定理)．

6．设$\{U_\lambda: \lambda\in D\}$是拓扑空间$X$的局部有限覆盖，则对于$X$的紧子集$C$，使

$$C\cap U_\lambda\neq\phi$$

的U_λ最多有限个。

7. 设X,Y为T_2空间，X为局部紧空间，f:$X\to Y$是连续开映射. 若K为Y的紧子集，则X有紧子集C，使$f(C)=K$。

8. 拓扑空间X称为σ-紧的，当且仅当X是可列个紧子集的并。每个σ紧空间是 Lindelöf 空间.

9. 小于第一不可数序数ω_1的序数集合Ω_0关于序拓扑不是仿紧空间。

10. 设$\mathscr{U}$是拓扑空间X的覆盖,$\mathscr{U}$在点$x\in X$的阶数(order),是$\mathscr{U}$中含x的成分的个数，记作ord$_x\mathscr{U}$.对于各点$x\in X$，当ord$_x\mathscr{U}<\infty$时,称$\mathscr{U}$是点有限(pointwise finite)的。试证点有限覆盖有最小于覆盖。

第六章 可度量化与紧化

(metrizable and compactification)

§1 积空间

(product spaces)

在直积集中引入积拓扑，在商集中引入商拓扑是从已知拓扑空间构成新拓扑空间的重要方法。Тихонов 在1929年和1935年发表的两篇文章中，定义了积空间，并提出很重要的性质。他的结果使积空间成为现代一般拓扑的典型工具之一。他不仅在可度量化和紧化问题上给出了完美的结果；而且对函数空间的拓扑结构也给出了深刻的刻画，解决了在 Тихонов 之前用函数列研究收敛性所遇到的许多困难，成为学习点集拓扑的必须知识。

在第二章§6讨论了度量空间的积空间，这个讨论自然可以推广到拓扑空间上来。

设$(X_1,\mathscr{T}_1),(X_2,\mathscr{T}_2),\cdots,(X_n,\mathscr{T}_n)$为 n 个拓扑空间，在集合

$$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$$

上，以

$$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n: U_i\in\mathscr{T}_i, i=1,2,\cdots,n\}.$$

为基导入拓扑，称为积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的积拓扑 (product topology)。

为了避免重复，关于积拓扑的讨论就一般情形论述，上述积拓扑只是一个特例。

设$\{(X_\lambda,\mathscr{T}_\lambda): \lambda\in D\}$为拓扑空间族，在预章§2中已知直积

集 $X=\prod\limits_{\alpha\in D}X_\alpha$ 是以 D 为定义域，对每个 α，使 $x(\alpha)\in X_\alpha$ 的函数 x 的集合。在讨论积空间时，X_α 称为 X 的 α-坐标空间（α—coordinate space），映射 $p_\alpha: X\to X_\alpha$，使得若 $x(\alpha)=x_\alpha$，则 $p_\alpha(x)=x_\alpha$，称为 X 到 X_α 的射影（projection）。显然有

$$p_\alpha^{-1}(x_\alpha)=\{x: p_\alpha(x)=x_\alpha\}=\{x_\alpha\}\times\prod_{\substack{\beta\in D\\ \beta\neq\alpha}}X_\beta.$$

对于 X_α 的开集 U_α，有

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha)=\{x: p_\alpha(x)=x_\alpha\in U_\alpha\}=U_\alpha\times\prod_{\substack{\beta\in D\\ \beta\neq\alpha}}X_\beta.$$

在度量空间的积空间讨论中，已知射影是连续开映射。今在积空间中确定拓扑，必须保证射影的连续性。为此，对于 X_α 的任意开集 U_α，$p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 必须是开集。

以

$$\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha): \alpha\in D, U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\}$$

为子基在 X 中确定的拓扑，由第三章 § 6 定理 4 知它是使射影是连续的最小拓扑。这个拓扑称为积拓扑（product topology）。故对于 D 的任意有限子集 Q，形如

$$\bigcap_{\alpha\in Q}\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha): U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\}=\{x: 对\ \alpha\in Q\ 有\ x_\alpha\in U_\alpha\}$$

的集合为开集基。确定的拓扑即积拓扑。

在积空间中还可以用其它方法确定拓扑，如以

$$\prod\{U_\alpha: \alpha\in D, U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\}$$

为开集基确定的拓扑称为箱拓扑（box topology）。显然，箱拓扑强于积拓扑。我们主要讨论积拓扑，下面提到积空间都意味着具有积拓扑。

定理 1 积空间在它的每个坐标空间上的射影是开映射。

证明 设 p_β 是积空间 $X=\prod\limits_{\alpha\in D}X_\alpha$ 到坐标空间 X_β 上的射影。为了证明 p_β 是开映射，只需对 X 的任一元素 x 及 x 的任一邻域 U_x，证明 $p_\beta(U_x)$ 是 $p_\beta(x)$ 的邻域，而 U_x 也可以只就

拓扑基讨论即可。

设

$$U_x=U_{\alpha_1}\times U_{\alpha_2}\times\cdots\times U_{\alpha_n}\times\prod_{\substack{\alpha\neq\alpha_i\\ \alpha\in D}}X_\alpha,\ \alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n\in D.$$

若 β 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 之一，则 $p_\beta(U_x)=U_\beta$。若 $\beta\neq\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 $p_\beta(U_x)=X_\beta$。很明显，U_β 及 X_β 都是 $p_\beta(x)$ 的邻域。

p_β 不是闭映射。例如具有通常拓扑的 Euclid 平面 R^2 中的点集

$$\{(x,y):\ xy=1\}$$

是闭集，但该集在每个坐标空间上的射影都不是闭集。

定理 2 拓扑空间 Y 到积空间 $X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$ 的映射 f 是连续的，当且仅当对每个射影 p_α，复合映射 $p_\alpha\circ f$ 是连续的。

证明 因射影是连续的，连续映射的复合也是连续的，故必要性成立。

由积拓扑的定义，集族

$$\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha):\ \alpha\in D,U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\}$$

是积空间的子基。因

$$f^{-1}[p_\alpha^{-1}(U_\alpha)]=(P_\alpha\circ f)^{-1}(U_\alpha),$$

而由条件 $P_\alpha\circ f$ 是连续的，故 $(P_\alpha\circ f)^{-1}(U_\alpha)$ 是 Y 中开集，即 f^{-1} 将 X 的开集映为 Y 的开集。由第三章 § 3 定理 1，f 是连续映射。

定理 3 积空间 $X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$ 上的网 S 收敛于点 $x_0\in X$，当且仅当 S 在每个坐标空间上的射影收敛于 x_0 点在该坐标空间上的射影。

证明 因射影是连续映射，由第五章 § 3 定理 8 知必要性成立。

设 $\{S_\alpha,\alpha\in D_0\}$ 是积空间的网，且对每个 $\beta\in D$，$\{p_\beta(S_\alpha),\ \alpha\in D_0\}$ 收敛于 x_β，则对 x_β 的每个开邻域 U_β，网 $\{p_\beta(S_\alpha),\ \alpha\in D_0\}$ 终于 U_β。所以网 $\{S_\alpha,\alpha\in D_0\}$ 终于 $p_\beta^{-1}[U_\beta]$，也必终于形如

$P_\beta^{-1}[U_\beta]$ 的集的有限交，即终于 x_0 的邻域基的每个成分。故充分性成立。

在积拓扑下的收敛称为坐标收敛 (coordinate convergence)。特别是在所有坐标空间皆相同时称之为点态收敛 (pointwise convergence)。这时积空间是 D 到 X 的所有映射的集合，通常记作 X^D。X^D 的网 $\{F_\alpha, \alpha \in D_0\}$ 在点态收敛拓扑下收敛于 f，当且仅当关于每个 $\beta \in D$，网 $\{F_\alpha(\beta), \alpha \in D_0\}$ 收敛于 $f(\beta)$。

定理 4 积空间 $X = \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ 的子集 $A = \prod_{\alpha \in D} A_\alpha$ 的闭包是 $\prod_{\alpha \in D} \overline{A_\alpha}$。

证明 因射影是连续的，故 $p_\alpha(\overline{A}) \subset \overline{p_\alpha(A)} = \overline{A_\alpha}$ $(\alpha \in D)$。于是 $\overline{A} \subset \prod_{\alpha \in D} \overline{A_\alpha}$。对于 $a = (a_\alpha, \alpha \in D) \in \prod_{\alpha \in D} \overline{A_\alpha}$ 的任意邻域 V，有各 a_α 的邻域 V_α，使 $\prod_{\alpha \in D} V_\alpha \subset V$。因 $a_\alpha \in \overline{A_\alpha}$，故关于各 α，有 $b_\alpha \in A_\alpha \cap V_\alpha$。由 $b = (b_\alpha, \alpha \in D) \in A \cap V$，故 $a \in \overline{A}$。

推论 在积空间 $X = \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ 中，$\prod_{\alpha \in D} A_\alpha$ 是闭集，当且仅当各 A_α 是 X_α 的闭子集。

推论 T_1 空间的直积是 T_1 空间。

定理 5 T_2 空间的积空间是 T_2 空间。

证明 设 $x, y \in \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$，$x \neq y$，则有 $\alpha \in D$，使 $x_\alpha \neq y_\alpha$。因每个坐标空间是 T_2 空间，故有开集 U_α，$V_\alpha \subset X_\alpha$，使 $U_\alpha \cap V_\alpha = \phi$，$x_\alpha \in U_\alpha$，$y_\alpha \in V_\alpha$。故 $p_\alpha^{-1}[U_\alpha]$ 与 $p_\alpha^{-1}[V_\alpha]$ 是 $\prod X_\alpha$ 中 x 与 y 的不相交邻域。

定理 6 第一可数空间的直积是第一可数空间，当且仅当除可数个坐标空间外都是密集空间。

证明 设 E 为 D 的可数子集，对每个 $\alpha \in D \setminus E$，X_α 是密集

空间．设x为$X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$的任一点，对任意$\alpha\in D\backslash E$，$x_\alpha$的邻域只有一个$X_\alpha$，且$p_\alpha^{-1}[X_\alpha]=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$．对每个$\beta\in E$，$x_\beta$有可数个邻域$U_\beta^i$，$i=1,2,\cdots$为邻域基．于是所有形如

$$p_\beta^{-1}[U_\beta^i],\ i=1,2,\cdots,\ \beta\in E$$

的有限交构成x的邻域基．这个邻域基是可数的，故X是第一可数空间．

反之，设E是D的不可数子集，对每个$\beta\in E$，X_β不是密集空间．即有$x_\beta\in X_\beta$，X_β有真子集V_β是x_β的邻域．

设$\mathscr{U}$是x的可数邻域基，对每个$U\in\mathscr{U}$，必含有积拓扑的成员，其形式为除有限个D的成员外，其余为$p_\alpha[U]=X_\alpha$．因E是不可数集，必有$\beta\in E$，使得每个$U\in\mathscr{U}$，$p_\beta[U]=X_\beta$．这时$p_\beta^{-1}[V_\beta]$不含任何$\mathscr{U}$中元素，这与$\mathscr{U}$是x的邻域基矛盾．

定理 7（Тихонов） 紧拓扑空间的直积关于积拓扑是紧空间．

证明 设$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha),\alpha\in D\}$是紧拓扑空间族，且$X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$具有积拓扑．设

$$\mathscr{S}=\{p_\alpha^{-1}[U_\alpha]:U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\}$$

为积拓扑的子基．应用第五章§4定理4，设$\mathscr{S}$的子族Ω，使得Ω没有有限子族能覆盖X，只若证明Ω也不覆盖X即可．

对每个指数$\alpha\in D$，设

$$\mathscr{B}_\alpha=\{U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha:p_\alpha^{-1}[U_\alpha]\in\Omega\}.$$

则$\mathscr{B}_\alpha$没有有限子族覆盖X_α．因X_α为紧空间，故$\mathscr{B}_\alpha$不覆盖X_α．有点x_α．对每个$U_\alpha\in\mathscr{B}_\alpha$，均有$x_\alpha\in\mathscr{C}U_\alpha$．于是点$x$的坐标是$x_\alpha$者不属于$\Omega$的任意成分，即$\Omega$不是$X$的覆盖．

定理 8 Тихонов 空间的直积是Тихонов 空间．

证明 首先约定拓扑空间X到闭单位区间$I=[0,1]$的连续函数f，是关于对(x,U)的函数，当且仅当x是点，U是

x 的邻域，$f(x)=0$，f 在 $\mathscr{C}U$ 上恒等于 1 .

设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是关于 $(x,U_1)\cdots,(x,U_n)$ 的函数，其中 n 是正整数。令

$$g(x)=\sup\{f_i(x):i=1,2,\cdots,n\},$$

则 g 是关于 $\left(x,\ \bigcap_{i=1}^{n}U_i\right)$ 的函数。于是关于每个 x，和 x 的属于某个拓扑子基的每个邻域 U，有关于 (x,U) 的函数，则此空间是完全正则的。

设 $\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha):\alpha\in D\}$ 是Тихонов空间族，$X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$，且 $x\in X$，U_α 是 x_α 在 X_α 的邻域。若 f 是关于 (x_α,U_α) 的函数，则 $f\cdot p_\alpha$ 是关于 $(x,p_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ 的函数，而形如

$$\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha):\alpha\in D,U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\}$$

的集族构成积拓扑的子基。故积空间是完全正则空间。由定理 4 的推论知 T_1 空间的直积是 T_1 空间，故 Тихонов 空间的直积是 Тихонов 空间。

定理 9 设 $\{(X_n,d_n),n\in N\}$ 是伪度量空间序列，它们的直径最多是 1，在直积集上规定

$$d(x,y)=\sum\{2^{-n}d_n(x_n,y_n),\ n\in N\},$$

则 d 是关于直积集的伪度量，且这个伪度量拓扑是积拓扑。

证明 关于 d 是积空间上的伪度量，直接推验即可证明。略去不证。

为了证明伪度量拓扑和积拓扑一致，设 V 是点 x 关于积度量拓扑的 2^{-p} 球。令

$$U=\{y:d(x_n,\ y_n)<2^{-p-n-2},n\leqslant p+2\}.$$

若 $y\in U$，则

$$d(x,y)<\sum\{2^{-p-n-2}:n=0,\cdots,p+1\}+\sum\{2^{-n}:p+2,\cdots\}<2^{-p-1}+2^{-p-1}=2^{-p}.$$

故 $U\subset V$。但 U 是关于积拓扑 x 的邻域，故关于伪度量拓扑是

开集的集合，关于积拓扑也是开集。反之，设U是积拓扑确定子基的一个成分，则有$W\in\mathscr{T}_n$，使

$$U=\{x:x_n\in W\}.$$

若$x\in U$，则有x_n的开r球是W的子集。因$d(x,y)\geqslant 2^{-n}d_n(x_n,y_n)$，故关于$x$的开$r\cdot 2^{-n}$球是$U$的子集。即当$d(x,y)<r\cdot 2^{-n}$时，由$2^{-n}d_n(x_n,y_n)\leqslant d(x,y)<r\cdot 2^{-n}$，有$d_n(x_n,y_n)<r$，故$y\in U$。于是积拓扑的每个成分，关于伪度量拓扑是开集。

推论 I^N是度量空间。

各种紧性在积空间中有下述诸结果：

	有限积	可列积	任意积
紧性	0	0	0
可列紧	×	×	×
序列紧	0	0	×
Lindelöf	×	×	×
局部紧	0	×	×
仿紧	×	×	×

0号为成立，×号为不成立。

【习　　题】

1．若$X=\prod\limits_{\alpha\in D}X_\alpha$是$T_2$空间，则每个$X_\alpha$也是$T_2$空间。

2．设X,Y是拓扑空间，且令$X\times Y$是积空间，$A\subset X$，$B\subset Y$，则

a．$\overline{(A\times B)}=\overline{A}\times\overline{B}$；

b．$(A\times B)^\circ=A^\circ\times B^\circ$；

c．$\partial(A\times B)=\overline{(A\times B)}\setminus(A\times B)^\circ$
$=[(\partial A\cup A^\circ)\times(\partial B\cup B^\circ)]\setminus(A^\circ\times B^\circ)$

$$= (\partial A \times \partial B) \cup (\partial A \times B^\circ) \cup (A^\circ \times \partial B)$$
$$= (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B).$$

3．$X = \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ 是正则空间，当且仅当对各 $\alpha \in D, X_\alpha$ 是正则空间。

4．设 C 为积拓扑空间 $X = \prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ 中，点 $x = (x_\alpha, \alpha \in D)$ 的连通分支，C_α 为各 x_α 在坐标空间 X_α 的连通分支，则 $C = \prod_{\alpha \in D} C_\alpha$。

5．积拓扑有可数基，当且仅当每个坐标空间的拓扑有可数基，且除可列个坐标空间外都是密集空间。

6．任意族连通拓扑空间的积是连通空间。

7．积空间到每一坐标空间的射影关于箱拓扑是连续的开映射。

8．设 X 是拓扑空间，对于指标集 D 有 B，C 使 $B \cup C = D$，$B \cap C = \phi$，则积 X^D 同胚于 $X^B \times X^C$，且 $(X^B)^C$ 同胚于 $X^{B \times C}$。

9．设 $\{X_\alpha, \alpha \in D\}$ 是拓扑空间族，若 $B \subset D$，$C \subset D$，$B \cap C = \phi$，$D = B \cup C$。则积空间 $\prod_{\beta \in B} X_\beta \times \prod_{\gamma \in C} X_\gamma$ 同胚于 $\prod_{\alpha \in D} X_\alpha$。

10．非可数无限个度量空间的直积空间未必是度量空间。

11．设 X 是仿紧空间，Y 是紧空间，则 $X \times Y$ 是仿紧空间（Dieudonné定理）。

12．设 X 是仿紧空间，Y 是局部紧仿紧 T_2 空间，则 $X \times Y$ 是仿紧空间。

13．设 X 是完全正则伪紧空间，Y 是紧空间，则 $X \times Y$ 是伪紧空间。

14．设 X 是 Lindelöf 空间，Y 是紧空间，则 $X \times Y$ 是Lin-

delöf 空间（Mrowka 定理）。

15．若 X 是序列紧空间，Y 是紧空间，则 $X \times Y$ 是序列紧空间。

16．空间 X 是弱紧空间(lightly compact space)，当且仅当每个局部有限开集族是有限的。弱紧空间与紧空间的直积是弱紧空间。

§2 商空间

(quotient spaces)

设 f 为由拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 到集 Y 上的映射，关于在 Y 上如何确定拓扑使 f 是连续的问题，在第三章§6已知，令

$$\mathscr{U}=\{U\subset Y, f^{-1}(U)\in\mathscr{T}\},$$

则 $(Y,\mathscr{U})$ 是拓扑空间，$\mathscr{U}$ 是使 f 连续的最强拓扑。这个诱导拓扑也常称为由 $(X,\mathscr{T})$ 及 f 确定的 Y 的**商拓扑**(quotient topology)。

定理1 若 f 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 到拓扑空间 $(Y,\mathscr{U})$ 上的连续映射，则 $\mathscr{U}\leqslant$ 商拓扑．且若 f 是开映射或闭映射，则 $\mathscr{U}\geqslant$ 商拓扑。

证明 由商拓扑的定义，第一个结论显然成立。

设 U 是商拓扑下的开集，即 U 是 Y 的子集，使 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集．因

$$U=f[f^{-1}(U)],$$

且 f 是开映射，故 $U\in\mathscr{U}$。

定理2 设 $f:(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$ 是连续满射，$\mathscr{U}$ 是商拓扑，则 $g:(Y,\mathscr{U})\to(Z,\mathscr{V})$ 是连续映射，当且仅当 $g\circ f$ 是连续映射。

证明 必要性显然成立。

因为 $g\circ f$ 为 X 到 Z 的连续映射，所以对 Z 中任意开集 U

$[g\circ f]^{-1}[U]$

是X中开集，而

$$[g\circ f]^{-1}[U]=f^{-1}\{g^{-1}[U]\}.$$

又因Y具有商拓扑，故$g^{-1}[U]$为Y中开集．即g是连续映射．

设X为拓扑空间，R是X上的一个等价关系，设Y是X按关系R分成的等价类的集合，即$Y=X/R$，或

$$Y=\{R(x):x\in X\}.$$

即Y是X的一个分解（decomposition）：

$$X=\bigcup\{R(x):R(x)\in Y\}.$$

当$R(x)\cap R(y)\neq\phi$时，有$R(x)=R(y)$．

设p为X到Y的映射，对X的每一元素x，有$p(x)=R(x)$即每点x对应含x的类．当$\mathscr{U}$是Y中使p成为连续的最细拓扑，即由$(X,\mathscr{T})$及p确定的Y的商拓扑时，$(Y,\mathscr{U})$称为商空间（quotient space）或分解空间（decomposition space）．p称为X到商空间的射影（projection）或商映射（quotient mapping）．

定理3　设p为$(X,\mathscr{T})$到商空间X/R上的射影，则下述命题等价：

a．p是开映射；

b．若A是X的开子集，则X的子集

$$R[A]=\{x:x\in R(a),\ a\in A\}$$

是开集；

c．若A是X的闭子集，则X的子集

$$\bigcup\{R[x]:R[x]\subset A\}$$

是闭集．

证明　a⇒b 若p为开映射，A为X的开子集，则$p[A]$是商空间的开集．由商拓扑的定义p是连续的，故$p^{-1}[p[A]]$是开集．因

$$p^{-1}[p[A]]=\{x:x\in R(a),\ a\in A\}=R[A].$$

故$R[A]$是开集．

b ⇒ a，若对 X 的每个开集 A，$R[A]=p^{-1}[p[A]]$ 是开集，则由商拓扑的定义，$p[A]$ 必须是商空间 X/R 的开集，故 p 是开映射。

为了证明 b 与 c 等价，先证

$\bigcup\{R[x]:R[x]\subset A\}=\mathscr{C}R[\mathscr{C}A]$.

实际上，若 x 属于左端，则 $R[x]\subset A$。若 $x\in R[\mathscr{C}A]$，则有 $y\notin A$ 使 $x\in R[y]$，即 $y\in R[x]$，这与 $R[x]\subset A$ 矛盾。故 $x\in\mathscr{C}R[\mathscr{C}A]$，即左⊂右。

若 x 属于右端，即 $x\,\overline{\in}\,R[\mathscr{C}A]$。故只若 $y\notin A$，必有 $R[x]\neq R[y]$，即 $y\,\overline{\in}\,R[x]$，从而 $R[x]\subset A$。故 $x\in$ 左端，即左⊃右。

b ⇒ c 若 A 是 X 的闭子集，则 $\mathscr{C}A$ 是 X 的开子集，由 b 知 $R[\mathscr{C}A]$ 是 X 的开子集，即 $\mathscr{C}R[\mathscr{C}A]$ 是 X 的闭子集。

c ⇒ b 若 A 是 X 的开子集，则 $\mathscr{C}A$ 是 X 的闭子集，由 c 知 $\mathscr{C}R[A]$ 是闭集，即 $R[A]$ 是开集。

定理的 a．b．c 中将开和闭交换位置仍然是等价命题。

当拓扑空间 X 具有某种性质时，商空间是否仍然具有该性质，这个问题显然也是重要的。如果不增加较强的条件，就连最简单的性质，商空间也未必能继承下来。

例　设 X 为具有通常拓扑的实数集，在 X 上确定关系为

$$R=\{(x,y):x-y=\text{有理数}\}.$$

则 X/R 是密集空间，且 X 到 X/R 上的射影 p 是开的。

此例指出 T_2 空间的商空间不是 T_2 空间。即使加上射影是开映射的条件，也不能保证商空间的 T_2 性，对射影是闭映射也是如此。

在讨论商空间的性质时，常增加下述条件。

关系 R 看作 $X\times X$ 的子集，下述各条件等价：

a．R 在 $X\times X$ 中是闭集；

b．若 $(x,y)\notin R$，则在 $X\times X$ 中存在点 (x,y) 的邻域

W，使$W\cap R=\phi$，

c．若$(x,y)\notin R$，则分别存在x的邻域U，y的邻域V，使

$$(U\times V)\cap R=\phi;$$

d．若$(x,y)\notin R$，则分别存在x的邻域U，y的邻域V，使U中任何点都不与V的任何点属于同一类。

定理 4 若商空间X/R是T_2空间，则R在$X\times X$中是闭集。若射影p是开映射，且R在$X\times X$中是闭集，则X/R是T_2空间。

证明 若X/R是T_2空间，则当$(x,y)\notin R$时，$p(x)\neq p(y)$，且存在不相交的$p(x)$的开邻域U及$p(y)$的开邻域V，集合$p^{-1}[U]$及$p^{-1}[V]$都是X中开集，且在映射p下不相交。即$p^{-1}[U]$中没有与$p^{-1}[V]$属于R的同一类的点。所以$p^{-1}[U]\times p^{-1}[V]$是$(x,y)$的邻域，且与$R$不相交，于是$R$是闭集，定理的第一个结论成立。

其次假设p是X到X/R的开映射，且R是闭的。若$p(x)$与$p(y)$是X/R中不同元素，即x与y在关系R下不属于同一类，则因为R是闭的，分别存在x的开邻域U，y的开邻域V，使得U的任何点都不与V的点属于同一类。因此，U与V的象是不相交的。又因p是开映射，从而$p(U)$与$p(V)$分别是$p(x)$与$p(y)$的开邻域。于是证得X/R是T_2空间。

为了得到由拓扑空间X到商空间X/R的射影p为闭映射的条件，引进上半连续分解的概念。

设$\mathfrak{D}$是拓扑空间X的一个分解（即按某等价关系分为等价类的集合）。在X中，如果对每个$D\in\mathfrak{D}$和每个包含D的开集U，存在一个开集V，使得$D\subset V\subset U$，且V是$\mathfrak{D}$中元素的并集。这时$\mathfrak{D}$称为**上半连续分解**（upper semi—continuous decomposition）。

定理 5 拓扑空间X的分解$\mathfrak{D}$是上半连续的，当且仅当X到

$\mathfrak{D}$ 的射影是闭的。

证明 设射影是闭的。由定理 3 对偶命题的 c 知，若 A 是 X 的开子集，则 X 的子集

$$\bigcup\{R[x]:R[x]\subset A\}$$

是开集，对任意 $D\in\mathfrak{D}$ 和每个包含 D 的开集 U，由条件

$$V=\bigcup\{R[x]:R[x]\subset U\}$$

是开集，因 $D\subset U$，故 $D\subset V\subset U$。

反之，对于 X 的任意开子集 A，令

$$V=\bigcup\{R[x]:R[x]\subset A\}.$$

对每个 $x\in V$，有 $D\in\mathfrak{D}$，使 $x\in D\subset V\subset A$。因 A 是 X 的开子集且 $D\subset A$，由上半连续定义存在开集 W，使 $D\subset W\subset A$，而 W 是 $\mathfrak{D}$ 的元素的并。从而 $x\in D\subset W\subset V\subset A$，即 V 为它的任何点的邻域，而 V 是开集，由定理 3 对偶命题的 a，c 等价，得到射影 p 是闭映射。

定理 6 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathfrak{D}$ 是 X 的上半连续分解，$\mathfrak{D}$ 的成分在 X 中是紧集，$\mathfrak{D}$ 具有商拓扑。若 X 是 T_2，T_3，局部紧或第二可数，则相应的 $\mathfrak{D}$ 也是。

证明 为了叙述方便，称 X 的子集 M 为容许的（admissible），当且仅当 M 是 $\mathfrak{D}$ 的成分的并。故上半连续分解的含意是 $\mathfrak{D}$ 的任一成分的任一邻域都含有一个容许邻域。故在 X 中 $\mathfrak{D}$ 的成分 D 的邻域在射影下的象是 $\mathfrak{D}$ 中 D 的邻域，而且 X 到 $\mathfrak{D}$ 的射影是闭映射。

设 X 是 T_2 空间，A 和 B 是 $\mathfrak{D}$ 的不相同成分，则在 X 中有 A 和 B 的不相交邻域（由第五章 § 4 定理 9）。它们含有不相交的容许邻域，且这两个容许邻域的射影是 $\mathfrak{D}$ 中 A 和 B 的不相交邻域。

设 X 是 T_3 空间，$D\in\mathfrak{D}$，$\mathfrak{M}$ 是 D 在 $\mathfrak{D}$ 中的邻域。则 $\mathfrak{M}$ 的成分的并集 U 是 D 在 X 中的邻域。由第五章 § 4 定理10知 X 中有 D 的闭邻域 V，使 $V\subset U$，V 在 $\mathfrak{D}$ 中的射影是 $\mathfrak{D}$ 中闭集，且含在

$\mathfrak{M}$中，故$\mathfrak{D}$是T_3空间。

设X是局部紧空间，则$\mathfrak{D}$的每个成分D在X中有紧邻域，在射影下它在$\mathfrak{D}$中的象是D的紧邻域，故$\mathfrak{D}$是局部紧空间。

最后，设X是第二可数空间，$\mathfrak{B}$是X的可数基，$\mathfrak{B}$的有限子族的并的族$\mathscr{U}$也是可数族，对于$\mathscr{U}$的每个成分U，设

$$G_U = \bigcup\{D \in \mathfrak{D} : D \subset U\}.$$

$$\mathscr{T} = \{G_U : U \in \mathscr{U}\}$$

则$\mathscr{T}$的成分在射影下的象是开集，且象的族是关于商拓扑的基。

实际上，因D是X的紧子集，对于D的任一开邻域V，D可用$\mathfrak{B}$的有限个成分覆盖，使这些成分的并为W，满足$W \subset V$。显然$W \in \mathscr{U}$，令$G_W = H$，则$H \in \mathscr{T}$，且$D \subset H \subset V$。故$\mathscr{T}$的成分在射影下的象做成商拓扑的基。

【习　　题】

1．可分空间的商空间是可分空间。

2．连通空间的商空间是连通空间。

3．Lindelöf 空间的商空间是 Lindelöf 空间。

4．拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到商空间X/R的射影p是闭映射，当且仅当对于X的每个子集A，有

$$\overline{R[\overline{A}]} \subset R[\overline{A}]$$

5．拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到商空间X/R的射影p是开映射，当且仅当对于X的每个子集A，有

$$R[A^\circ] \subset R[A]^\circ.$$

6．设X为T_3空间但非T_4空间，A和B是不相交的闭子集，使A的邻域和B的邻域都相交。

设

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}, R = \Delta \cup (A \times A).$$

则R在$X\times X$中是闭集，且商空间X/R是T_2空间而不是T_3空间。

7．在上题的前提下，令

$$S=\Delta\cup(A\times A)\cup(B\times B).$$

则S在$X\times X$中是闭集，但X/S不是T_2空间。

8．设X为集合，R为X上的等价关系，对于X的任意子集A，定义$\overline{A}=R[A]$。试证$\overline{A}$是闭包算子，并讨论由此导入的拓扑结构具有哪些性质。

9．设$f:(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$为连续满射，由

$$\mathfrak{D}=\{f^{-1}(y):y\in Y\}$$

确定X的分解$\mathfrak{D}$，则Y和$\mathfrak{D}$之间可建立1—1映射$\varphi:Y\to\mathfrak{D}$，使$\varphi(y)=f^{-1}(y)$。φ未必是同胚映射，但φ是开映射。

10．设f为拓扑空间X到拓扑空间Y上的闭或开的连续映射，令

$$\mathfrak{D}=\{f^{-1}(y):y\in Y\},$$

则Y同胚于$\mathfrak{D}$。

§3 嵌　　入
(embedding)

闭单位区间$I=[0,1]$的直积I^A具有积拓扑时，称为广义立方体(cube)。可见广义立方体是集A到闭单位区间I的所有函数的集合，具有点态收敛拓扑。

设F是拓扑空间X到拓扑空间Y_f的映射f的族，其中象空间Y_f可以不同。于是X到积

$$\prod\{Y_f:f\in F\}$$

中有自然映射将X的点x映为积的成分，其第f的坐标是$f(x)$。形式地，用

$$e(x)_f=f(x)$$

确定**赋值映射** (evaluation mapping) e。如果F的成分是连续的，则e是连续的。如果F还含有足够多的映射，则e是同胚的。

X上的映射族F是区别点(distinguishes points)的，当且仅当对于不同的点对x，y，在F中有f使$f(x)\neq f(y)$。映射族F是区别点和闭集(distinguishes points and closed sets)的，当且仅当对X的每个闭子集A和$\mathscr{C}A$的元素x在F中有f使$f(x)$不属于$f[A]$的闭包。

定理1 设F是连续映射族，它的每个成分f是拓扑空间X到拓扑空间Y_f的映射，则

a．赋值映射e是X到积空间$\prod_{f\in F}Y_f$的连续映射；

b．如果F区别点和闭集，则映射e是X到$e(X)$上的开映射；

c．映射e是一一的，当且仅当F是区别点的。

证明 a．因

$$p_f\circ e(x)=f(x).$$

由§1定理2，e是连续的，当且仅当f是连续的。故e是连续映射。

b．设G为X的开子集，往证$e(G)$为$e(X)$的开子集。设$y\in e(G)$，则有$x\in G$使$y=e(x)$。对应x和$\mathscr{C}G$，有$f_a\in F$，使$f_a(x)\notin\overline{f_a(\mathscr{C}G)}$。令

$$H=\mathscr{C}\overline{f_a(\mathscr{C}G)}.$$

则$f_a(x)\in H$，H为Y_a的开子集。故有

$$p_a(y)=p_a(e(x))=f_a(x)\in H,$$

从而，$y\in p_a^{-1}(H)\subset\prod Y_a$，$p_a^{-1}(H)$为$\prod Y_a$的开子集。令

$$V=p_a^{-1}(H)\cap e(X),$$

则$y=e(x)\in V$，V为$e(X)$的开子集。

设$z\in V=p_a^{-1}(H)\cap e(X)$，则$z\in e(X)$，故有$t\in X$，使$e(t)=z$。又因$z\in p_a^{-1}(H)$，从而$p_a(z)\in H=\mathscr{C}\overline{f_a(\mathscr{C}G)}$，

即$p_\alpha(z)\notin \overline{f_\alpha(\mathscr{C}G)}$.又因$p_\alpha(z)=p_\alpha(e(t))=p_\alpha\circ e(t)=f_\alpha(t)$，从而$f_\alpha(t)\notin \overline{f_\alpha(\mathscr{C}G)}$. 故$t\overline{\in}\mathscr{C}G$,即$t\in G$. 于是$z=e(t)\in e(G)$.故$V\subset e(G)$.即$e(G)$是它所含的每一点的邻域. 故$e(G)$是$e(X)$的开子集.

c. 若$x,y\in X,x\neq y$，则$e(x)\neq e(y)$. 即

$$e(x)=(f_\alpha(x),\alpha\in D)\neq(f_\alpha(y),\alpha\in D)=e(y).$$

必存在$\beta\in D$，使$f_\beta(x)\neq f_\beta(y),f_\beta\in F$.即$F$是区别点的.

反之，设$x,y\in X,x\neq y$,因F是区别点的，故存在$\beta\in D$，$f_\beta\in F$ 使$f_\beta(x)\neq f_\beta(y)$,于是有

$$e(x)=(f_\alpha(x),\alpha\in D)\neq(f_\alpha(y),\alpha\in D)=e(y).$$

即e是一一映射.

推论 设F是T_1空间X上的连续映射族，它的每个成分f是T_1空间X到拓扑空间Y_f的映射. 若F区别点和闭集，则X到积空间$\prod Y_f$的赋值映射是同胚映射.

定理 2 空间$(X,\mathscr{T})$是Тихонов空间,当且仅当X同胚于广义立方体的一个子空间.

证明 闭单位区间I是Тихонов空间,而广义立方体是I的直积. 由§1定理8，它是Тихонов空间，广义立方体的子空间由第四章§2习题3知仍为Тихонов空间. X与Тихонов空间同胚，故为Тихонов空间.

反之，设X为Тихонов空间，设F为X到I的所有连续函数f的集合，则F是区别X的点和闭集的，F也是区别点的. 由定理1，X到I^F的子空间上的赋值映射e是一一映射且为连续开映射. 故为同胚映射. 即X同胚于广义立方体的一个子空间.

同胚于广义立方体的一个子空间的拓扑空间，称为不变拓扑的嵌入(embedding)广义立方体.

定理 3 拓扑空间X是Тихонов空间,当且仅当X同胚于紧T_2空间的子空间.

证明 由定理2，Тихонов空间同胚于广义立方体的子空间，而广义立方体是紧T_2空间，故必要性成立。

反之，由第五章§4定理9的推论知紧T_2空间是正规空间。由第四章§2定理4知它是Тихонов空间，其子空间也是Тихонов空间。

定理4 第二可数的正则空间$(X,\mathscr{T})$必同胚于I^N的一个子空间。

证明 设$\mathscr{B}=\{V_n: n\in N\}$是$X$的可数基，因$X=\bigcup_{n\in N}V_n$，故对每点$x\in X$，必有$V\in\mathscr{B}$使$x\in V\in\mathscr{U}(x)$，因$X$是正则空间，故有$U\in\mathscr{B}$，使

$$x\in U\subset\overline{U}\subset V.$$

令

$$\Omega=\{(U,V): U,V\in\mathscr{B},\ \overline{U}\subset V\},$$

则Ω是可数集。由第四章§2定理6知第二可数的正则空间是正规空间，故对应(U,V)，存在X到I的连续映射f_{UV}，使$f_{UV}(\overline{U})=0$，$f_{UV}(\mathscr{C}V)=1$。令

$$F=\{f_{UV}:(U,V)\in\Omega\},$$

则F是可数集。

F是区别点和闭集的。实际上，设B是X的任意闭子集，任意$x\in\mathscr{C}B$，存在G，$W\in\mathscr{B}$，使

$$x\in G\subset\overline{G}\subset W\subset\mathscr{C}B.$$

于是$(G,W)\in\Omega$，$f_{GW}\in F$，使$f_{GW}(\overline{G})=0$，$f_{GW}(\mathscr{C}W)=1$。故$f(x)=0\notin\{1\}=\overline{f(B)}$，即$F$是区别点和闭集的。

由定理1及推论，赋值映射$e: X\to I^N$是到内的同胚映射。

【习　　题】

1．拓扑空间X是完全正则的，当且仅当X同胚于伪度量空间的直积的子空间。

2. I^N 是可分空间、连通空间、局部弧状连通空间. 而且满足第二可数公理.

3. I^I 是紧 T_2 空间, 正规且连通空间, 但不是完全正规空间.

§4 可度量化
(metrizable)

探索拓扑空间可度量化的条件是点集拓扑的最古老且产生问题最多的课题之一. Александров 和 Урысон 早在1923 年用开覆盖列上的一个特殊条件给出一个答案. 以后, 一直吸引人们的重视, 相继给出许多结果.

拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 称为**可伪度量化(可度量化)**的, 当且仅当 X 内有一个伪度量(度量) d, 使得由 d 确定的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}$ 一致.

伪度量空间 X 是度量空间, 当且仅当 X 是 T_1 空间. 即对每一点 $x \in X$, $\{x\}$ 是闭集.

例 密集空间是可伪度量化的. 对任意 $x, y \in X$, 恒有 $d(x, y)=0$. d 所确定的拓扑即为密集拓扑.

离散空间 X 是可度量化的. 实际上, 令

$$d(x,y)=0, \quad \text{当 } x=y \text{ 时},$$
$$d(x,y)=1, \quad \text{当 } x\neq y \text{ 时}.$$

则 d 是 X 的度量, 且 d 所确定的拓扑即离散拓扑.

不可数无限个数直线的积空间是不可度量化的. 实际上, 数直线是第一可数空间, 由 §1 定理 6 知积空间不是第一可数空间, 而可度量化的空间必是第一可数空间. 故不可数无限个数直线的直积是不可度量化的.

定理 1 (Урысон) 第二可数的正则空间 $(X, \mathscr{T})$ 是可度量化的.

证明　由§3定理4知$(X,\mathscr{T})$同胚于I^N的一个子空间，由§1定理9的推论知I^N是可度量化空间，故$(X,\mathscr{T})$是可度量化空间。

定理2　下述诸命题等价：

a．X是第二可数的正则空间；

b．X同胚于广义立方体I^N的子空间；

c．X是可度量化的，且是可分的。

证明　由§3定理4有a ⇒ b．

由§1定理9的推论知I^N是度量空间．X同胚于其子空间，故也是可度量化的．由§1习题5知I^N满足第二可数公理，其子空间也是，故X满足第二可数公理，而第二可数空间是可分空间。故b ⇒ c．

因X是可度量化而且是可分空间，由第三章§5定理3知X是第二可数空间．度量空间必是正则空间．故c ⇒ a．

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{P}(X)$，则族$\mathfrak{M}$称为离散族(discrete family)，当且仅当对任意$x\in X$，存在$V\in\mathscr{U}(x)$，使

$$\{A:A\in\mathfrak{M},A\cap V\neq\phi\}$$

至多是单点集。

$\mathfrak{M}$称为局部有限的(locally finite)，当且仅当对于任意$x\in X$，存在$V\in\mathscr{U}(x)$，使

$$\{A:A\in\mathfrak{M},A\cap V\neq\phi\}$$

是有限集。

$\mathfrak{M}$称为闭包保持(preserve closure)的，当且仅当对于任意$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$，必有

$$\overline{\bigcup_{A\in\mathfrak{N}}A}=\bigcup_{A\in\mathfrak{N}}\overline{A}.$$

$\mathfrak{M}$称为σ-局部有限(σ-离散、σ-闭包保持)的，当且仅当$\mathfrak{M}=\bigcup_{n\in N}\mathfrak{M}_n$，且任意$\mathfrak{M}_n$都是局部有限(离散、闭包保持)的。

定理 3 设$\mathfrak{M}$是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集族，则

a．若$\mathfrak{M}$是离散的，则$\mathfrak{M}$是局部有限的，且$\{\overline{A};A\in\mathfrak{M}\}$是离散的；

b．若$\mathfrak{M}$是局部有限的，则$\mathfrak{M}$是闭包保持的且$\{\overline{A}: A\in\mathfrak{M}\}$是局部有限的。

证明 a．若$\mathfrak{M}$是离散的，则$\mathfrak{M}$显然是局部有限的。这时，对任一点$x\in X$，有x的开邻域U_x，使集

$$\{A:A\in\mathfrak{M},A\cap U_x\neq\phi\}$$

至多有一个。又因$\overline{A}\cap U\subset\overline{A\cap U}$，故

$$\overline{A}\cap U=\phi\Longleftrightarrow A\cap U=\phi,$$

即

$$\overline{A}\cap U\neq\phi\Longleftrightarrow A\cap U\neq\phi.$$

故若$\mathfrak{M}$是离散的，则$\{\overline{A}:A\in\mathfrak{M}\}$也是离散的。

b．若$\mathfrak{M}$是局部有限的，也应用这一结果可知

$$\{\overline{A}:A\in\mathfrak{M},\overline{A}\cap U\neq\phi\}=\{\overline{A}:A\in\mathfrak{M},A\cap U\neq\phi\}$$

故$\{\overline{A}:A\in\mathfrak{M}\}$是局部有限的。

设$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$．对任意$A\in\mathfrak{N}$，有$A\subset\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}A$，故$\overline{A}\subset\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}A}$，

故有 $$\bigcup_{A\in\mathfrak{N}}\overline{A}\subset\overline{\bigcup_{A\in\mathfrak{N}}A}.$$

对任意$x\in\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}A}$，则$x$的任意邻域$U$，必有

$$U\cap(\bigcup_{A\in\mathfrak{N}}A)\neq\phi.$$

由局部有限性，x有邻域V恰和$\mathfrak{N}$的有限个A相交。如A_1，$A_2,\cdots,A_n$．在这n个A中必有一个A与x的任意邻域都相交。则$x\in\overline{A}$而$A\in\mathfrak{N}$。故$x\in\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}\overline{A}$．即$\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}\overline{A}\supset\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}A}$，$\therefore\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}\overline{A}=\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{N}}A}$。

定理 4 有σ局部有限基的正则空间是正规空间。

证明 设A，B为空间X的不相交闭子集，则分别存在A

和B的开覆盖$\mathscr{U}$和$\mathscr{V}$，$\mathscr{U}$的每个成分的闭包和B不相交，$\mathscr{V}$的每个成分的闭包和A不相交，并且$\mathscr{U}$和$\mathscr{V}$二者是σ局部有限基$\mathscr{B}$的子族。于是$\mathscr{U}=\bigcup\{\mathscr{U}_n, n\in N\}$，$\mathscr{V}=\bigcup\{\mathscr{V}_n, n\in N\}$，其中$\mathscr{U}_n$，$\mathscr{V}_n$是局部有限族。令

$$U_n=\bigcup\{W:W\in\mathscr{U}_n\}, V_n=\bigcup\{W:W\in\mathscr{V}_n\}.$$

则由定理3

$$\overline{U}_n=\bigcup\ \{\overline{W}:W\in\mathscr{U}_n\}.$$

故$\overline{U}_n$和B不相交。同理$\overline{V}_n\cap A=\phi$。令

$$U'_n=U_n\sim\bigcup\{\overline{V}_k:k\leqslant n\},\ V'_n=V_n\sim\bigcup\{\overline{U}_k:k\leqslant n\}$$

则集$\bigcup U'_n$和集$\bigcup V'_n$分别是所要求的A和B的不相交邻域。

定理5 有σ局部有限基的正则空间X是可度量化的。

证明 设$\mathscr{B}$是空间X的σ局部有限基。

$$\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_n, n\in N\}$$

其中每个$\mathscr{B}_n$都是局部有限族。

对于正整数m，n的序对，每个$U\in\mathscr{B}_m$，令

$$U'=\bigcup\{G:G\in\mathscr{B}_n, \overline{G}\subset U\}.$$

因$\mathscr{B}_n$是局部有限族，故$\overline{U}'\subset U$。由定理4知X是正规空间，由第四章§3定理2知X到闭单位区间有连续函数f_U，在$\overline{U}'$上为1，在$\mathscr{C}U$上为0。

对每一正整数对m，n，令

$$d(x,y)=\sum\{|f_U(x)-f_U(y)|:U\in\mathscr{B}_m\}$$

在$X\times X$上d的连续性是$\mathscr{B}_m$的局部有限性的直接结果。显然d是伪度量。

设D是这样取得的伪度量族。因对每个正整数对，作成一个伪度量，故D是可数的。

若A是X的闭子集，$x\in\mathscr{C}A$，则对某个m和某个$U\in\mathscr{B}_m$，使$x\in U\subset\mathscr{C}A$，且对某个$n$和某个$V\in\mathscr{B}_n$，使$x\in V$，$\overline{V}\subset U$。对于这一对构成的伪度量$d$，显然从$x$到$A$的$d$-距离最少是1。

于是空间X上有伪度量的可数族D，使得D的每个成分在

$X\times X$上是连续的．且对X的每个闭子集A和$\mathscr{C}A$的每点x，有D的成分d，使x到A的d-距离是正数．X到每个伪度量空间(X, d)的映射是连续的，由定理1，§1定理9及§3定理1，知X是可度量化的．

定理6 (Nagata—Смирнов)下述三条件是等价的：

a．空间是可度量化的；

b．空间是正则的且有σ局部有限基；

c．空间是正则的且有σ离散基．

证明 c⇒b 是显然的，b⇒a 即定理5，a⇒c 略去不证．

Nagata(1950)Смирнов(1951)独立提出这一定理．

【习　　题】

1．有可数基的紧T_2空间是可度量化的．

2．有可数基的T_3空间是可伪度量化的．

3．有可数基的局部紧T_2空间是可度量化的．

4．T_3空间X是伪度量空间，当且仅当X有基，它是可数多个局部有限族的并．

5．设X是紧T_3空间，且$X\times X$的对角线I是$X\times X$的可数多个开集的交，则X是可度量化的．

§5 紧　化
(compactification)

对于非紧空间X常需要构造一个紧空间，以X为其稠子空间．所构造的紧空间称为X的**紧化空间** (compactification space)．

例如添加两点$+\infty$，$-\infty$于实数空间称为扩张实数空间．

规定 $+\infty$ 为最大的数，$-\infty$ 为最小的数。将通常实数的序关系扩张，则得到的扩张实数空间，关于序拓扑是紧空间. 实际上，扩张实数的每个非空子集有下确界和上确界. 扩张实数空间即实数空间的紧化。

拓扑空间的最简单的紧化，是由添加一点而成.

例如在函数论中 Euclidean 平面上添加一点 ∞，规定 ∞ 点的邻域为平面的有界子集的补集. 则得到复数空间的紧化空间。

这个例子很富有启发意义. 类似地，可以作任意拓扑空间的紧化空间。

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，令 $X^*=X\cup\{\infty\}$.

$$\mathscr{T}_1=\{U:\mathscr{C}U\text{是}X\text{的闭紧子集},\ U\subset X^*\},$$

$$\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\mathscr{T}_1.$$

则 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的紧化空间.

定理1 (Александров). 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的一点紧化 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 是紧空间，且 X 是 X^* 的稠子空间.

空间 X^* 是 T_2 的，当且仅当 X 是局部紧的且是 T_2 的。

证明 根据 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 的作法，集 U 在 X^* 中是开集，当且仅当在 X 中 $U\subset X$ 是开集，或当 $\infty\in U$ 时，$\mathscr{C}U$ 是 X 中闭紧集。于是 X^* 的开集的任意并及有限交，其结果如果在 X 中则为 X 的开集；如果 ∞ 为 X^* 中两开集的交的元素，则交的补是 X 的二闭紧子集的并，由于交的补是闭紧子集，故 X^* 中两开集的交为开集；如果 ∞ 属于 X^* 的开子集族的成分的并，则 ∞ 必属于此族的某个成分 U，且并的补是紧集 $\mathscr{C}U$ 的闭子集，于是是闭且紧的. 因此 X^* 是拓扑空间，且 X 为其稠子空间.

若 $\mathscr{U}$ 是 X^* 的开覆盖，则 ∞ 是 $\mathscr{U}$ 中某个成分 U 的点，$\mathscr{C}U$ 是紧的. $\mathscr{U}$ 中有有限个覆盖 $\mathscr{C}U$，故 $\mathscr{U}$ 有有限个覆盖 X^*，而 X^* 是紧空间。

若 X^* 是 T_2 空间，则它的开子空间 X 是局部紧 T_2 空间。

最后指出，若X是局部紧T_2空间，则X^*是T_2空间。仅需指出，若$x\in X$，则有x,∞的不相交邻域即可。因X是局部紧且T_2的，故在X中有x的闭紧邻域U，于是$X^*\backslash U$和U°是∞和x的不相交邻域。

一点紧化是很特殊的类型，再介绍一种将拓扑空间嵌入紧空间的方法。

设X为拓扑空间，Y为紧拓扑空间，序对(f,Y)称为拓扑空间X的紧化(compactification)，当且仅当f是X到Y的稠子集上的同胚映射。

X的一点紧化X^*，即序对(i,X^*)。其中i为恒等映射。

紧化(f,Y)称为T_2的，当且仅当Y是T_2空间。

在空间X的所有紧化族上，确定序关系$\leqslant$为$(f,Y)\leqslant(g,Z)$，当且仅当有Z到Y的连续映射h，使$h\circ g=f$。

等价地，$(f,Y)\leqslant(g,Z)$，当且仅当$g[X]$到Y的映射$f\circ g^{-1}$存在连续扩张h，映Z于Y中。

若映射h为同胚映射，则(f,Y)和(g,Z)称为拓扑等价(topologically equivalent)。这时关系$(f,Y)\leqslant(g,Z)$和$(g,Z)\leqslant(f,Y)$同时成立，而h^{-1}是Y到Z上的连续映射，使$g=h^{-1}\circ f$。

定理2 拓扑空间X的所有紧化的族$\mathscr{K}$由$\leqslant$关系是有序集。若(f,Y)和(g,Z)都是空间X的T_2紧化，且$(f,Y)\leqslant(g,Z)\leqslant(f,Y)$，则$(f,Y)$和$(g,Z)$是拓扑等价的。

证明 若$(h,U)\leqslant(g,Z)\leqslant(f,Y)$都是空间$X$的紧化，则有$Y$到$Z$的连续映射$j$，$Z$到$U$的连续映射$k$，使$g=j\circ f$及$h=k\circ g$。故$h=k\circ j\circ f$，且$(h,U)\leqslant(f,Y)$。因此$\leqslant$关系是$X$的所有紧化族$\mathscr{K}$的偏序。即$(\mathscr{K},\leqslant)$是有序集。

若(f,Y)和(g,Z)都是X的T_2紧化，且$(f,Y)\leqslant(g,Z)\leqslant(f,Y)$，则$f\circ g^{-1}$和$g\circ f^{-1}$分别有$Z$到$Y$及$Y$到$Z$的连续扩张$j$和$k$。因$k\circ j$是$Z$的稠子集$g[X]$上的恒等映射，且

Z是T_2的，故 $k\circ j$ 是Z到Z上的恒等映射。同理 $j\circ k$ 是Y到Y上的恒等映射。因此(f,Y)和(g,Z)是拓扑等价的。

若X有T_2紧化空间，则由§3定理3知X必为 Тихонов 空间。可以构造一个它的最大紧化空间。

设X为拓扑空间，F为X到闭单位区间I的所有连续函数族。由Тихонов定理知I^F是紧空间。设e为X到I^F的赋值映射，对任意$f\in F$，$e(x)$的f坐标为$f(x)$。由§3定理1知e是连续映射。且若X为Тихонов空间，则e为X到I^F的子空间上的同胚映射。$e(X)$在I^F中的闭包设为$\beta(X)$，紧化$(e,\beta(X))$称为Stone—Čech紧化。

定理3 设f为集合A到集合B的映射，f^*为对所有$y\in I^B$由$f^*(y)=y\circ f$确定的I^B到I^A的映射，则f^*是连续的。

证明 由§1定理2知I^B到积空间I^A的映射f^*是连续的，当且仅当对每个射影p_α，$\alpha\in A$，复合映射$p_\alpha\circ f^*$是连续的。对任意$y\in I^B$，$p_\alpha\circ f^*(y)=p_\alpha(y\circ f)=(y\circ f)(\alpha)=y(f(\alpha))$。但$y(f(\alpha))$就是到$I^B$的$f(\alpha)$坐标空间$y$的射影，且这是连续映射。

定理4 (Stone—Čech)。若f为Тихонов空间X到紧T_2空间Y的连续映射，则在X的紧化空间$\beta(X)$上，f有到Y的连续扩张。

换言之，若$(e,\beta(X))$是X的Stone—Čech紧化，则$f\circ e^{-1}$可扩张为$\beta(X)$到Y的连续映射。

证明 给予f，对每个$a\in F(Y)$，$(F(Y)=C[Y,I])$，由令

$$f^*(a)=a\circ f$$

确定$F(Y)$到$F(X)$的f^*。对每个$q\in I^{F(X)}$，由令

$$f^{**}(q)=q\circ f^*$$

确定$I^{F(X)}$到$I^{F(Y)}$的f^{**}。设e为X到$I^{F(X)}$的赋值映射，并设g为Y到$I^{F(Y)}$的赋值映射。图表：

$$\begin{array}{ccc} \beta(X)\subset I^{F(X)} & \xrightarrow{\quad f^{**}\quad} & I^{F(Y)}\supset\beta(Y) \\ \uparrow e & & \uparrow g \\ X & \xrightarrow{\quad f\quad} & Y \end{array}$$

表出其间的关系。映射 e 是 X 到 $\beta(X)$ 中的同胚映射，因 Y 是紧 T_2 空间，g 是 Y 到 $\beta(Y)$ 上的同胚映射，由定理 3 知 f^{**} 是连续的，且若指出

$$f^{**}\circ e = g\circ f.$$

则 $g^{-1}\circ f^{**}$ 是要求的 $f\circ e^{-1}$ 的连续扩张。

若 $x\in X$，$h\in F(Y)$，则由 f^{**}, f^{*}，e 和 g 的定义可得出

$$(f^{**}\circ e)(x)(h) = (e(x)\circ f^{*})(h) = e(x)\circ(h\circ f)$$

$$= h\circ f(x) = g(f(x))(h) = (g\circ f)(x)(h).$$

这一个定理是 Stone 和 Čech 在1937 年分别提出的。

【习　　题】

1. 设(f, Y)是拓扑空间X的 T_2 紧化，使X 上每个有界实值函数 g，函数 $g\circ f^{-1}$ 有连续扩张，则(f, Y)拓扑等价于 Stone—Čech紧化$(e, \beta(X))$。

2. 设 Ω 为小于或等于 ω_1 的所有序数的集合，令 $\Omega_0 = \Omega\setminus\{\omega_1\}$具有序拓扑，则Stone—Čech紧化 $\beta(\Omega_0)$ 同胚于 Ω。

3. 一点紧化$(X^*, \mathscr{T}^*)$是 T_1 空间，当且仅当 $(X, \mathscr{T})$是 T_1 空间。

4. 若 (Q, τ) 是有理数集关于实拓扑的诱导拓扑，则(Q^*, τ^*)是T_1空间而不是T_2空间。它是序列紧空间。

§6　小结与反例

关于拓扑空间的各种性质之间的相互关系已经作过一系列

的讨论。为了便于记忆，归纳整理如下。（为了叙述方便，采用下列记号）

T_i：T_i 空间，$i=0,1,2,3,4,5$。

CR：完全正则空间。

M：可度量化空间。

C_{I}：第一可数空间。

C_{II}：第二可数空间。

C：紧空间。

S：可分空间。

L：Lindelöf 空间。

这些空间之间有

$$M\Rightarrow T_1+T_5\Rightarrow T_1+T_4\Rightarrow T_1+CR\Rightarrow T_1+T_3\Rightarrow T_2\Rightarrow T_1$$
$$\Rightarrow T_0.$$

前面曾指出过下列各种反例：

T（拓扑空间）$\not\Rightarrow T_0\not\Rightarrow T_1\not\Rightarrow T_2, T_3\not\Rightarrow T_1, T_4\not\Rightarrow T_1, T_4\not\Rightarrow T_3, T_4\not\Rightarrow T_3+T_1, T_3\not\Rightarrow T_4$.

$C_{\mathrm{II}}\Rightarrow C_{\mathrm{I}}\not\Rightarrow C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{II}}\Rightarrow S\not\Rightarrow C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{II}}\Rightarrow L\not\Rightarrow C_{\mathrm{II}}$.

$C_{\mathrm{I}}\not\Rightarrow S\not\Rightarrow L\not\Rightarrow C_{\mathrm{I}}\not\Rightarrow L\not\Rightarrow S\not\Rightarrow C_{\mathrm{I}}$.

$C_{\mathrm{II}}+$正则$\Rightarrow$正规，$C_{\mathrm{II}}+$正则$\Rightarrow$完全正规.

$L+$正则$\Rightarrow$正规，紧$+T_2\Rightarrow$正规，紧$+T_3\Rightarrow T_4$。

拓扑空间X在其子空间、积空间、商空间中的传递性如下页表：（成立者为 0，否则为×）

下面再举出一些例子。

第二可数的 T_2 空间，不是 T_3空间的例子。

例 1　在T_2空间$(X,\mathscr{T})$中任取一点 x_0，任取一个收敛于x_0 的点列$(x_n, n\in N)(x_n\neq x_0)$。令

$$D=\{x_n: n\in N\}$$

今在X中另外导入一个拓扑$\mathscr{T}_1$如下：

对于 $x\neq x_0$ 的点x，它的邻域和$\mathscr{T}$同样定义之；

		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	CR	M	C_{I}	C_{II}	C	S	L
子空间	一般	0	0	0	×	0	0	0	0	0	×	×	×
	闭集	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0
	开集	0	0	0	×	0	0	0	0	0	×	0	×
积空间	一般	0	0	0	×	×	0	×	×	×	0	×	×
	有限积	0	0	0	×	×	0	0	0	0	0	0	×
	可数积	0	0	0	×	×	0	0	0	0	0	0	×
商空间		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0

对于x_0点取x_0的$\mathscr{T}$邻域和$\mathscr{C}D$的交作为x_0点的邻域.

则$(X,\mathscr{T}_1)$是拓扑空间,且是T_2空间. 当$(X,\mathscr{T})$为通常拓扑的实数空间,则$(X,\mathscr{T})$不是T_3空间.

实际上,显然$(X,\mathscr{T})$是T_2空间. 设$(X,\mathscr{T})$为通常的实空间,关于$\mathscr{T}_1$,$\mathscr{C}D$是开集,故D是闭集. D和x_0是用开集分不开的.

实际上,设U为x_0的任一邻域,则存在x_0的$\mathscr{T}$邻域V,使$U=\mathscr{C}D\cap V$.因(x_n)关于$\mathscr{T}$收敛于x_0,故$V\cap D\neq\phi$.设$x_n\in V$,因x_n为$\mathscr{T}$邻域V的内点,故x_n的任意$\mathscr{T}$邻域V_n,有$V_n\cap U\neq\phi$. 故D的任意邻域和U的交不空.

于是$(X,\mathscr{T})$不是T_3空间.

若$\mathscr{T}$满足第二可数公理,则$\mathscr{T}_1$也满足.

实际上,设$\{G_n, n\in N\}$是$\mathscr{T}$的拓扑基,$\{U_n; n\in N\}$是x_0的可数邻域基,则

$$\{G_n: n\in N\}\cup\{U_n\setminus D: n\in N\}$$

构成$\mathscr{T}_1$的可数基. 故$\mathscr{T}_1$满足第二可数公理.

由此可见第二可数的T_2空间未必是T_3空间.

正规但非完备正规的例子.

例 2　设X是线性序集,在X的两端添加最小元及最大

元，设为Y．令

$$\mathscr{U}=\{(a,b)=\{y\in Y: a<y<b\}: a<b,\ a,b\in Y\}$$

以$\mathscr{U}$为基在X导入拓扑，称之为区间拓扑（interval topology）．$\mathscr{U}$的成分称为开区间（open interval）．闭区间的定义是明显的．由区间拓扑立即看出，线性序集恒为T_3空间．

在小于或等于（小于）序数α的序数全体上导入区间拓扑记作$[0,\alpha]$（$(0,\alpha)$）．

a．$[0,\alpha]$是紧空间．

证明 设$\mathscr{V}$为$[0,\alpha]$的任意开区间覆盖，在$\mathscr{V}$的成分中必有含α者，设为V_1．V_1的左端设为α_1，在$\mathscr{V}$的成分中含α_1者设为V_2．V_2的左端设为α_2．如此下去，作成序列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$，必须仅经有限次达到0．否则，$\alpha_1>\alpha_2>\cdots$构成可数无限集，被含于$[0,\alpha]$中，它没有最前元素与序数集是良序集矛盾．故只能取有限次即达到0，而$\mathscr{V}$有有限子覆盖．

b．设A为$[0,\omega_1)$的零集，则A或A的补集必定是等终的（ω_1是第一个不可数序数）．

证明 否则，必有零集A存在，使A及$[0,\omega_1)\sim A$都是共尾的．

因A为零集，故有连续函数$f:[0,\omega_1)\to[0,1]$，使

$$A=\{x\in[0,\omega_1): f(x)=0\}.$$

令

$$B=[0,\omega_1)\setminus A,$$

则 $B=\{x\in[0,\omega_1): f(x)\neq 0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:|f(x)|\geqslant\frac{1}{n}\}$．令

$$B_n=\{x:|f(x)|\geqslant\frac{1}{n}\},$$

则 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$．因$B_n$为闭集，故B为$F_\sigma$集．

若 B_n 皆非共尾，则 $\sup B_n<\omega_1$，于是

$$\sup_n \sup B_n<\omega_1.$$

这与$[0,\omega_1)-A$是共尾的矛盾．故必有 B_n 是共尾的．于是有列

$$\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\cdots,\alpha_i\in A,\beta_i\in B_n$$

存在．若 $\sup\alpha_i=\alpha$，则 $\alpha\in B_n\cap A$．但 $B_n\cap A=\phi$．矛盾．

c．$[0,\omega_1)$ 是正规空间．

设闭集 F,H 使 $F\cap H=\phi$，则 F,H 不能都是共尾的．如果 F,H 都是共尾的，则有列

$$\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\cdots,\alpha_n\in F,\beta_n\in H.$$

若 $\sup\alpha_n=\alpha$，则 $\alpha\in F\cap H$，矛盾．故 F,H 中必有不是共尾的．设F不是共尾的，则有 $\alpha<\omega_1$，使 $F\subset[0,\alpha]$．因 $[0,\alpha]$ 是闭子空间，故由 a 它是紧 T_2 的．由第五章 § 4 定理 9 的推论知 $[0,\alpha]$是正规的．取开集 U,V，使 $F\subset U,H\cap[0,\alpha]\subset V,U\cap V=\phi$，$U\cup V\subset[0,\alpha]$．令

$$W=V\cup(\alpha,\omega_1),$$

则W是开集且 $H\subset W,U\cap W=\phi$．

d．$[0,\omega_1)$不是完备正规空间．

证明　设F为$[0,\omega_1)$中的极限数全体，则F是闭集．F与$[0,\omega_1)\setminus F$都是共尾的，故由 b，F必不是零集．由定义，$[0,\omega_1)$ 不是完备正规空间．

e．$[0,\omega_1)$上连续函数 f 是有界的．

证明　若 f 是无界连续函数，则存在 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots<\omega_1$，使 $|f(\alpha_i)|>i$．若 $\sup\alpha_i=\beta$，则 f 在 β 连续性不成立．

f　对于$[0,\omega_1)$上的连续函数 f，存在 $\alpha<\omega_1$，对于 $\alpha\leqslant\beta<\omega_1$ 的任意 β，有$f(\alpha)=f(\beta)$．

证明　由 e，f 是有界的．故存在正数 a，使$|f|\leqslant a$．设 f 的图象为G．

$$G(\alpha)=G\cap([\alpha,\omega_1)\times[-a,a]),\qquad \alpha<\omega_1.$$

若 $A=\{\alpha: f(\alpha)\geqslant 0\}$，则 A 是某函数的零集，由 b，A 或 $[0,\omega_1)-A$ 是等终的．即有 α_1 存在，使下述之一成立．

$$G(\alpha_1)\subset[\alpha_1,\omega_1)\times[-a,0],\quad G(\alpha_1)\subset[\alpha_1,\omega_1)\times[0,a].$$

用二分法将此作法继续作下去，可取得点列 $\{\alpha_i\}$，闭区间列 $\{I_i\}$，满足

$$G(\alpha_i)\subset[\alpha_i,\omega_1)\times I_i, I_i\supset I_{i+1}\ ,\ d(I_i)\to 0.$$

$\cap I_i$ 为一点，令为$\{b\}$．设 $\sup\alpha_i=\alpha$，则当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，有$f(\alpha)=f(\beta)=b$．

正规但非完全正规的例子．

例 3 设ω_0为第一个可数序数，ω_1为第一个不可数序数，$X=[0,\omega_0]$，$Y=[0,\omega_1]$，$Z=X\times Y$．

Z 是正规空间．

由例 2 知X及Y都是紧 T_2 空间．由§1定理5 及定理7 知Z关于积拓扑是紧 T_2 空间．由第五章§4定理9 的推论知 Z是正规空间．

令 $Z_0=Z\backslash\{(\omega_0,\omega_1)\}$，称为Тихонов 板．在 Z_0 上考虑相关拓扑．Z_0 不是正规空间，即正规空间Z的子空间 Z_0 不是正规空间，亦即Z不是完全正规空间．令

$$A=\{(\omega_0,y): y\in Y\},\quad B=\{(x,\omega_1): x\in X\}$$

关于Z的积拓扑，A，B 都是闭集．于是

$$A_0=A\cap Z_0,\quad B_0=B\cap Z_0$$

都是 Z_0 的闭集，$A_0\cap B_0=\phi$．设 G_1，G_2 为 Z_0 的开子集，使

$$A_0\subset G_1,\quad B_0\subset G_2,$$

则必有 $G_1\cap G_2\neq\phi$．

实际上，因 G_2 是开集，对于 $(n,\omega_1)\in B_0$，有 α_n 存在，使$\{(n,y): \alpha_n<y\leqslant\omega_1\}\subset G_2$．令

$$\alpha=\sup\{\alpha_n: n=1,2,3,\cdots\},$$

则 α 也是具有可数基数的序数，即 $\alpha<\omega_1$．

因 G_1 是开集，对于$\alpha+1$，有 $m_{\alpha+1}$，使

$$C=\{(x,\alpha+1):m_{\alpha+1}<x\leqslant\omega_0\}\subset G_1.$$

显然 $C\subset G_2$，故 $C\subset(G_1\cap G_2)\neq\phi$。

正则的但非完全正则的例子。

例4　在例3的符号下，设 Z_i 为 Z_0 的拷贝（$i\in N$），A_i，B_i 分别为对应 A_0，B_0 的 Z_i 的边。当 i 为奇数 $2n+1$ 时，将 B_{2n+1} 和 B_{2n+2} 贴合。即将 B_{2n+1} 和 B_{2n+2} 相对应的点看作是同一点。当 i 为偶数 $2n$ 时，将 A_{2n} 和 A_{2n+1} 贴合。设 S 为如此得到的点集，即 $S=\bigcup_{i\in N}Z_i$。在 S 中导入拓扑如下：

$U\subset S$ 是开集，当且仅当对于各 i，$U\cap Z_i$ 是开集。于是 S 是完全正则空间。设 $p\notin S$，$T=S\cup\{p\}$，S 在 T 中是开集，p 点的邻域基为

$$\{U_n=(S-\bigcup_{i=1}^{n}Z_i)\cup\{p\}:n\in N\}.$$

如此导入的拓扑，显然 T 是正则空间。由例2，对于 $[0,\omega_1)$ 上的连续函数 f，必有 $\alpha<\omega_1$ 和常数 a，使对 $\alpha\leqslant\beta<\omega_1$ 的任意 β，恒有 $f(\beta)=f(\alpha)=a$。a 称为 f 的常值，而 $[\alpha,\omega_1)$ 称为常值尾。

设 a 为 $g\in C(Z,I)$ 在 A_0 上的常值，则

$$\lim_{n\to\infty}g(n,\omega_1)=a.$$

实际上，设 g 在 $\{i\}\times[0,\omega_1)$ 上的常值为 a_i，常值尾为 $\{i\}\times[\alpha_i,\omega_1)$。设 g 在 A 上的常值尾为 $\{\omega_0\}\times[\alpha,\omega_1)$，取比所有 α_i $(i<\omega_0)$ 及 α 都大的 $\gamma<\omega_1$。由

$$\lim_{i\to\infty}g(i,\gamma)=\lim_{i\to\infty}a_i=g(\omega_0,\gamma)=a$$

及 $a_i=g(i,\omega_1)$ 得到

$$\lim_{i\to\infty}g(i,\omega_1)=a.$$

T 不是完全正则的。

实际上，观察 p 点和 $\mathscr{C}U_2$，考虑在 U_2 的外部取值为 1 的

$f \in C[T, I)$．由 f 在 A_n 上的常值与在 A_{n+1} 上的常值是以 $B_n = B_{n+1}$ 为媒介一致．这对于任意的 n 都成立．故在各 A_n 上的定常值都必须是 1．从而 $f(p)=1$，而 T 不是完全正则的．

这个例子指出 T 是正则但不是完全正则的．

例 5 （Cantor 集）将闭单位区间 I 三等分，设左侧闭区间 $I(0)=[0, \frac{1}{3}]$，右侧闭区间为 $I(1)=[\frac{2}{3}, 1]$，再将 $I(0)$ 三等分，左右两侧的闭区间分别是 $I(0,0)=[0, \frac{1}{9}]$，$I(0,1)=[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$，如此继续下去，得到闭区间列

$$I(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) \quad \delta_i = 0, 1, \ n = 1, 2, \cdots,$$
$$I(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) \supset I(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n, \delta_{n+1}),$$
$$\delta(I(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)) = \frac{1}{3^n}.$$

这个闭区间列称为 Souslin 系．令

$$C = \bigcup \{\bigcap \{I(\delta_1, \cdots, \delta_n) : n = 1, 2, \cdots\} : \delta_i = 0, 1\}$$

称为 Cantor 集．在 C 的点中是 $I(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ 的端点的集合称为 C 的端点集，记作 P．显然 P 是可数集．若 $I(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ 的左、右端点分别记作 $p(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$，$q(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$，则

$$p(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) = \bigcap \{I(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n, \cdots, \delta_m) : \delta_{n+1} = \cdots = \delta_m = 0, m > n\},$$
$$q(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) = \bigcap \{I(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n, \cdots, \delta_m) : \delta_{n+1} = \cdots = \delta_m = 1, m > n\}.$$

若令

$$\chi(\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots) = \bigcap \{I(\delta_1, \cdots, \delta_n) : n = 1, 2, \cdots\},$$

则

$$p(\delta_1, \cdots, \delta_n) = \chi(\delta_1, \cdots, \delta_n, 0, 0, \cdots),$$
$$q(\delta_1, \cdots, \delta_n) = \chi(\delta_1, \cdots, \delta_n, 1, 1, \cdots).$$

a．C 的基数为 $\mathfrak{C}$．

实际上，令

$$X=\{(\delta_1,\delta_2,\cdots):\delta_i=0,1\},$$

$\varphi:X\to C$ 为由

$$\varphi((\delta_1,\delta_2,\cdots))=\chi(\delta_1,\delta_2,\cdots)$$

定义之，则 φ 是双射，故

$$C\text{的基数}=X\text{的基数}=2^{\aleph_0}=\mathfrak{C}.$$

b．C是紧集.

实际上，因C可表为

$$C=\bigcap\{\bigcup\{I(\delta_1,\cdots,\delta_n):\delta_i=0,1\}:n=1,2,\cdots\},$$

其中 $I(\delta_1,\cdots,\delta_n)$ 为闭集，并为有限并，交为任意交，故C为 I 的闭子集. 因 I 是紧集，故C为紧集.

c．C是实数空间的无处稠密的完全集.

实际上，由作法C不含有区间，C为闭集，C无内点，故C无处稠密，又因C的点都是C的聚点，故C为完全集.

d．C是完全非连通的.

实际上，任意二点之间必含有去掉的区间，即任二点不在一个分支中.

e．C和二点离散空间$\{a,b\}$的可数无限积空间$\{a,b\}^{\omega_0}$同胚.

实际上，上述a中的映射φ是同胚映射.

例6　在实数集R中，当$x\leqslant y$时，令$d(x,y)=y-x$，当$x>y$时，令$d(x,y)=1$，则d满足度量公理的非负性，三角形不等式，但不满足对称性. 在R中，令

$$U(x,\varepsilon)=\{y:d(x,y)<\varepsilon\}\quad(\varepsilon>0)$$

为邻域基确定拓扑$\mathscr{T}_1$，则 R 关于拓扑 $\mathscr{T}_1$ 是 T_1 空间. $(R,\mathscr{T}_1)$ 称为 Sorgenfrey 直线.

a．$(R,\mathscr{T}_1)$是正规空间.

设A,B为R的闭集，$A\cap B=\phi$，令

$$d(A,x)=\inf\{d(y,x):y\in A\}$$

$$U=\{x: d(A,x)<d(B,x)\}$$
$$V=\{x: d(A,x)>d(B,x)\}$$

则$U\cap V=\phi$，$A\subset U$，$B\subset V$，且U，V都是开集，故$(R,\mathscr{T}_1)$是正规空间。

b．$(R,\mathscr{T}_1)$ 是完全正规空间。

上述事实对于R的任意子空间都成立。

c．$(R,\mathscr{T}_1)$不满足第二可数公理。

设$\{G_\lambda: \lambda\in D\}$是$(R,\mathscr{T}_1)$的开集基．对于任意 $x<y$，$[x,y)$是$\mathscr{T}_1$开集，故关于$x\in[x,y)$，必有G_λ使$x\in G_\lambda\subset[x,y)$．于是$D$的基数最少和实数的基数相同，因而$(R,\mathscr{T}_1)$不满足第二可数公理。实际上，

$$\{[x,\ x+\frac{1}{2^n}): x\in R,\ n\in N\}$$

构成开集基。

d $(R,\mathscr{T}_1)$ 是可分空间。

设有理数全体为Q，若$\overline{Q}\neq R$，则有开集G，使$G\cap Q=\phi$．即对于 $x\in G$，有$\varepsilon>0$，使$[x,x+\varepsilon)\subset G$，故$[x,\ x+\varepsilon)\cap Q=\phi$，矛盾．于是$\overline{Q}=R$，而$(R,\mathscr{T}_1)$是可分空间。

e．$(R,\mathscr{T}_1)$ 是不可度量化的。

由第二章§1定理4知度量空间是可分的，当且仅当它有可数基．因$(R,\mathscr{T}_1)$是可分的，但不满足第二可数公理，故$(R,\mathscr{T}_1)$是不可度量化的。

f．$(R,\mathscr{T}_1)$具有 Lindelöf 性质。

取R的任意开覆盖：$\{G_\lambda: \lambda\in D\}$，因任意开集恒可表为形如

$$[x,y)\qquad (x<y)$$

的开集的可数并．于是$\{G_\lambda: \lambda\in D\}$具有可数子覆盖的事实只就$G_\lambda=[x_\lambda,y_\lambda)$的情形而言就已足够了．为此，按通常拓扑的实数空间的情形证明即可。

这是一个完全正规但不可度量化，是可分的具有 Lindelöf 性质但第二可数公理不成立的例子。

例 7 取拓扑空间$(X,\mathscr{T})$为例6的$(R,\mathscr{T}_1)$。在$X^2=X\times X$上确定积拓扑为$\mathscr{T}_2$，即拓扑空间$(X^2,\mathscr{T}_2)$的各点(x,y)的邻域基取为

$$[x,y;x+\varepsilon_1,y+\varepsilon_2)=\{(\alpha,\beta):\alpha\in[x,x+\varepsilon_1),\ \beta\in[y,y+\varepsilon_2),\ \varepsilon_1,\varepsilon_2>0\}$$

a．$(X^2,\mathscr{T}_2)$是完全正则的.

实际上，因$(X,\mathscr{T})$是完全正则的，故其直积也是完全正则的。（§1定理8）

b．$(X^2,\mathscr{T}_2)$不是正规的.

实际上，令Q为有理数集，且

$$E_0=\{(x,y):x+y=0\}$$

$$E_1=\{(x,y):x\in Q,x+y=0\}$$

$$E_2=\{(x,y):x\in\mathscr{C}Q,x+y=0\}$$

则E_1,E_2为X^2的闭子集且$E_1\cap E_2=\phi$。若开集G_1，G_2，满足$E_1\subset G_1$，$E_2\subset G_2$，则$G_1\cap G_2\neq\phi$。

实际上，对于E_2的各点(x,y)，有某个$\varepsilon_x>0$，使$[x,y;x+\varepsilon_x,y+\varepsilon_x)\subset G_2$。在此，令

$$A_n=\{x\in\mathscr{C}Q:\frac{1}{n-1}>\varepsilon_x\geqslant\frac{1}{n}\},\ n=1,2,\cdots,$$

则$A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$，$\mathscr{C}Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

$\mathscr{C}Q$作为R的子集关于通常拓扑是第二类集．故所有的A_n都是无处稠密集是不可能的．于是最少有一个$\overline{A_n}$含有某区间(x_1,x_2)，这时必有有理数$x\in(x_1,x_2)$，对于$(x,y)\in E_1$，有某个$\varepsilon>0$，使

$$I=[x,y;x+\varepsilon,y+\varepsilon)\subset G_1$$

但必有$I\cap G_2\neq\phi$，故$G_1\cap G_2\neq\phi$。

这是正规空间的积空间，不是正规空间的例子。

c．$(X^2,\mathscr{T}_2)$是可分空间。

实际上，$E=\{(x,y):x\in Q,y\in Q\}$是可数集，$\overline{E}=X^2$。

d．E_0不是可分空间。

实际上，$E_0=\{(x,y):x+y=0\}$是离散空间，故不是可分空间。

这是可分空间的子空间未必是可分空间的例子。

e．$(X^2,\mathscr{T}_2)$不是第二可数空间。

实际上，与例6相同。

f．$(X^2,\mathscr{T}_2)$不具有Lindelöf性质。

实际上，若$(X^2,\mathscr{T}_2)$具有Lindelöf性质，则其闭子空间$E_0=\{(x,y):x+y=0\}$也具有同样性质，与E_0是离散的且不可数相矛盾。故$(X^2,\mathscr{T}_2)$不具有Lindelöf性质。

这也是Lindelöf空间的积空间未必是Lindelöf空间的例子。

例8　设X为正则空间但非正规空间。即有X的闭集A，B，使$A\cap B=\phi$，但用开集不能分离。

令X的等价关系的图象为$X\times X$的子集R

$$R=\triangle\cup(A\times A),\quad \triangle=\{(x,x):x\in X\}.$$

则R为$X\times X$的闭集，令

$$Y=X/R.$$

即Y的点是A及$\{\{x\}:x\in\mathscr{C}A\}$。因$X$是正则的，故$Y$是$T_2$空间。但在$Y$中点$A$及闭集$\{\{x\}:x\in B\}$不能用开集分离，即$Y$是$T_2$空间，但不是正则空间。

在$X\times X$中，令

$$R_1=\triangle\cup(A\times A)\cup(B\times B),$$

作商空间$Y=X/R_1$。在Y中2点A，B用开集不能分离，即Y不是T_2空间。

这是正则空间的商空间不是正则空间及正则空间的商空间

不是T_2空间的例子。

例 9　设X为包含x轴的上半平面，规定普通的开集在X是开的。x轴上点p的邻域基为在p的上方切于p点的开圆盘添加p点构成，此X称为 Moore 平面。

X显然是完全正则的，两坐标为有理数的点集是X的可数稠子集，故X是可分空间．但x轴是X的子空间，x轴具有离散拓扑，是不可分空间．

这也是可分空间的子空间不可分的例子。

参 考 文 献

1. 江泽涵，拓扑学引论，上海科技出版社，1978。
2. 关肇直，拓扑空间概论，科学出版社，1958。
3. 吴东兴，点集拓扑学基础，科学出版社，1981。
4. 方嘉琳，集合论，吉林人民出版社，1982。
5. 河田敬义，集合·拓扑·测度，赖英华译，上海科技出版社，1961。
6. Hausdorff F.，集论，张义良等译，科学出版社，1960。
7. 儿玉之宏、永见启応，拓扑空间论，1974，方嘉琳译，科学出版社。
8. 谢邦杰，超穷数与超穷论法，吉林人民出版社，1979。
9. 小松醇郎，位相空间论，东京，岩波书店，1947。
10. 中山正，集合·位相·代数系，至文堂，1948。
11. 布川正己，现代数学序说，下，东京，东海大学出版社，1975。
12. 古关健一，集合论的位相几何学，东京，槙书店，1974。
13. 田林一郎，トポロジー，东京，岩波书店，1972。
14. 加藤十吉，位相几何学，东京，日本放送出版社，1975。
15. 竹之内修，トポロジー，广川，1962。
16. 河田敬义，三村征雄，现代数学概说，Ⅱ，东京，岩波书店。
17. 河野伊三郎，位相空间论，东京，共立，1954。
18. 野口広，位相空间，至文堂，1964。
19. 弥永昌吉、弥永健一，集合と位相，Ⅰ，东京，岩波书店，1976。
20. 弥永昌吉、弥永健一，集合と位相，Ⅱ，东京，岩波书店，1977。
21. 稻垣武，点集合论，东京，岩波书店，1949。
22. 龟谷俊司，集合と位相，朝仓，1961。
23. 梶原壤二，解析学序说，东京，森北，1976。
24. Акилов Г.П.，Лекции по Математическому анализу，1975。

25. Александров П.С., Введение в теорию множеств и общую топологию, 1977.
26. Alexandroff P. and Hopf H., Topologie I, Berlin, 1935.
27. Alo R. A. and Shapiro H. L., Normal topological space, 1974.
28. Arnald B.H., Intuitive Concepts in Elementary Topology, Englewood cliffs N.J., Prentice—Hall, 1962.
29. Aubin J.P., Applied Abstract Analysis, 1977.
30. Baum J. D., Elements of point set topology, 1964. 蒲思立译, 人民教育出版社, 1982.
31. Benjamin T.S., Fundamentals of topology, 1976.
32. Berge C., Espaces topologiques, 1959.
33. Bing R.H., Elementary Point Set Topology, 1960.
34. Booss, Bernhelm, Topologie und Analysis, 1977.
35. Bourbaki N., Topologie générale, Paris: Hermann, 1953.
36. Breuer J., Introduction to the theory of sets, Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1959.
37. Brown, Ronald, Elements of modern topology, 1968.
38. Burgess, D.C.J., Analytical topology, 1966.
39. Čech E., Topological Space, 1966.
40. Christensen J.P.R., Topology and Borel structure, 1974.
41. Christensen Charles, O. and Voxman William L., Aspects of topology, 1977.
42. Christie D.E., Basic topology, 1976.
43. Copson E.T., Metric Spaces, 1968.
44. Császár A., Grundlagen der Allgemeinen Topologie, 1963.
45. Császár, A. ed., Topic in topology, 1974.
46. Császár. A., General topology, 1978.
47. Dincaleanu N., Integration on locally compact spaces, 1974.
48. Dugundji J., Topology, 1968.
49. de Vries H., Compact spaces and compactifications, Thesis, Amsterdam, 1962.

50. Eisenberg M.,Topology, Holt Rinehart & Winston,1974.
51. Enderton H.B., Elements of set theory, Academic,1977.
52. Engelking R., Outline of general topology, 1968.
53. Fraenkel A.A., Abstract set theory, 1976.
54. Fraenkel A. and Bar-Hillel Y.and Levy A., Foundations of set theory, Amsterdam North—Holland,1973.
55. Frêchet M.,Les espaces abstractes, Paris, 1926.
56. Gaal S.A., Point Set Topology,1964.
57. Gemignani M.C.,Elementary Topology,1967.
58. Gillman L. -Jerison M., Rings of continuous functions, Princeton–Toronto–London-N.Y.,1960.1976.
59. Greever J.,Theory and Examples of point set Topology,1967.
60. Hall D.W. and Spencer G.L., Elementary Topology,New York:Wiley, 1955.
61. Halmos P.R.,Naive set Theory,Springer—Verlag,New York inc., 1974.
62. Hocking J. G. and Young G.S., Topology, Reading Mass: Addison-Wesley, 1961.
63. Hu S.T., Elements of General Topology, San Francisco: Holden-Day.1964.
64. Isbell J.R., Uniform spaces, Providence, 1964.
65. Jameson G.J.O.,Topology and normed spaces, 1974.
66. Juhász, I., Cardinal Function in Topology,1971.
67. Kahn, Donald W., Topology,1975.
68. Kelley J.L., General Topology,New York: Von Nostrand, 1955,Springer-Verlag,1975.吴从炘吴让泉译,科学出版社,1982.
69. Kowalsky H.J., Topological spaces,1964.
70. Kuratowski C., Introduction to set theory and Topology, New York:Pergamon,1961.
71. Kuratowski C., Topology I.,1966.
72. Kuratowski C., Topology Ⅱ., 1968.
73. Kuratowski K. and Mostowski A., Set theory, 1976.

74. Mansfield M.J., Introduction to Topology, Princeton N, J.:Van Nostrand,1963.
75. Mamuzic Z.,Introduction to general topology, Groningen, 1963.
76. Moore R. L., Foundations of point set theory, A. M. S. Colloquium Publ. XII, New York,1962.
77. Munkres James R., Topology a first course, 1975.
78. Murdeshwar,M.G.and Naimpally, S.A,Quasi Uniform Topological spaces,1966.
79. Nadler S.B.Jr., Hyperspaces of sets,1978.
80. Nagata J. I., Modern General Topology, 1974.
81. Nakano H., Topology and Linear Topological spaces, Maruzen, Tokyo, 1951.
82. Newman M. H. A., Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge, 1939.
83. Nöbeling G.,Grundlagen der analytischen Topologie, Springer-Verlag, Berlin,1954.
84. Patterson E.M., Topology, New york:Interscience,1959.
85. Pervin.W.J.,Foundations of General Topology, Academic Press,New York, 1964.
86. Querenburg Boto Von., Mengentheoretische topologie,1973.
87. Reed,G.M.(Ed), Set-Theoretic Topology, Academic Press, Now York, 1977.
88. Rudin M.E., Lecture on set theoretic topology, 1974.
89. Schubert H., Topology, 1968.
90. Sierpinski W., Introduction to General topology, Toronto, 1952.
91. Simmons G. F., Introduction to Topology and Modern Analysis, New York:McGraw, 1963.
92. Sims B.T., Fundamentals of Topology, Macmillan, 1976.
93. Singal M.K., Some recent trends in general topology,1977.
94. Siwiec F.E., A study of space and mappings,1972.

95. Stavrakas N.M. and Allen K.R. ed., Studied in topology, 1975.

96. Steen L.A. Seebach J.A. Jr., Counterexamples in topology, 1978.

97. Sutherland W.A., Introduction to metric and topological spaces, 1975.

98. Thron W.J., Topological structures, 1966.

99. Tukey J.W., Convergence and uniformity in topology, Ann. of Math. studies 2, 1940.

100. Vaidynathaswamy R., Treatise on Set Topology, Part I., Madras: Indian Mathematical Society, 1947.

101. Verbeek A., Superextensions of topological spaces, 1972.

102. Whyburn G. T., Topological Analysis, Princeton University Press, 1958.

103. Ward, Lewis E. Jr., Topology, 1972.

104. Willard S., General Topology, 1970.

105. Winzen W., Anschauliche Topologie, 1975.

106. Wong Y.C., The topology of uniform convergence on order-bounded sets, 1976.

107. Халимский Е.Д., Упорядоченные топологические пространства, 1977.

108. 熊金城，点集拓扑讲义，人民教育出版社，1982.

姓 名 索 引

符 号 索 引

名 词 索 引

（汉语名词依汉语拼音字典顺序排列）

B

C

E

F

G

H

J